Iceberg

Données : Masse volumique de l'océan $\rho_0 = 1\,020\,\mathrm{kg/m^3}$, masse volumique de la glace $\rho_g = 920\,\mathrm{kg/m^3}$, masse volumique de l'air ρ_a à calculer avec $P_0 = 1\,013\,\mathrm{hPa}$ et $T = -5\,°\mathrm{C}$.

Équilibre de l'iceberg : $\vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0}$

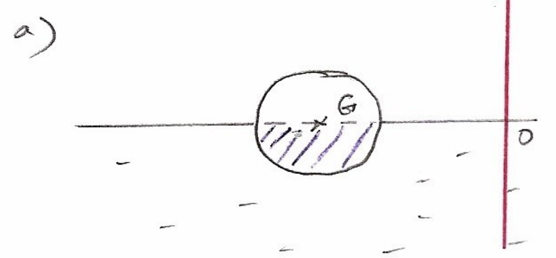
$\vec{P} = \rho_g V \vec{g} = -\rho_g V g \vec{u}_z$ et $\vec{\Pi} = -\rho_a v \vec{g} - \rho_0 (V - v)\vec{g} = [\rho_a v + \rho_0 (V - v)] g \vec{u}_z$, opposée du poids de l'air et de l'eau remplacés, donc $\rho_a v + \rho_0 (V - v) = \rho_g V$ soit $(\rho_0 - \rho_g) V = (\rho_0 - \rho_a) v$: $\boxed{\dfrac{v}{V} = \dfrac{\rho_0 - \rho_g}{\rho_0 - \rho_a}}$

On a $pV = nRT$ donc $p \dfrac{m}{\rho_a} = \dfrac{m}{M_a} RT$: $\rho_a = p \dfrac{M_a}{RT} = 1{,}32\,\mathrm{kg/m^3}$ et finalement $\boxed{\dfrac{v}{V} = 9{,}82\,\%}$.

En négligeant le volume d'air déplace, on trouve $\dfrac{v}{V} = 9{,}80\,\%$, valeur très proche.

OSCILLATIONS BOUCHON

a)



Réf : Terre, gal   Sys : Bouchon, masse m

Contrainte : immobile

BdF : Poids $\vec{P} = m\vec{g} = \rho V \vec{g}$

Poussée d'Archimède

$$\vec{\Pi} = -\vec{P}_f = -\rho_0 \frac{V}{2} \vec{g}$$

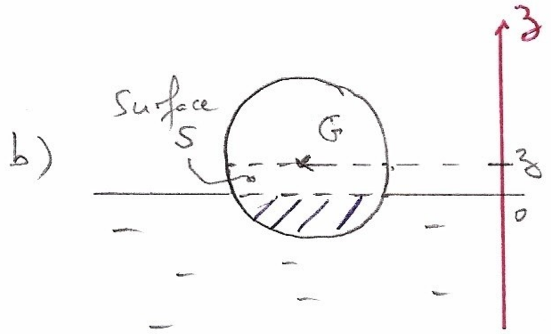
RdF : $\vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0}$

Inutile de projeter $\left(\rho V - \rho_0 \frac{V}{2}\right)\vec{g} = \vec{0}$

$$\iff \rho = \frac{\rho_0}{2} = 500\,\mathrm{kg/m^3}$$

---

b)



z étant très petit, les bords sont presque verticaux : $S = 2Rz$, à l'ordre 1 en z.

c) On a maintenant $\overrightarrow{RFD}$: $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{\Pi}$

Sur z : $m\ddot{z} = -\rho V g + \rho_0\left(\frac{V}{2} - SL\right)g$

Or d'après a), les 2 premiers termes s'annulent : $\rho V \ddot{z} = -\rho_0 \cdot 2R z L g$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{\rho_0}}{2} \cdot \pi \underline{R^2} \cancel{L} \ddot{z} = -2\cancel{\rho_0} \underline{R} z \cancel{L} g$$

$$\Leftrightarrow \pi R \ddot{z} = -4 g z$$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{4g}{\pi R} z = 0$$

d) D'où la pulsation (propre) des oscillations $\omega_0 = \sqrt{\frac{4g}{\pi R}}$

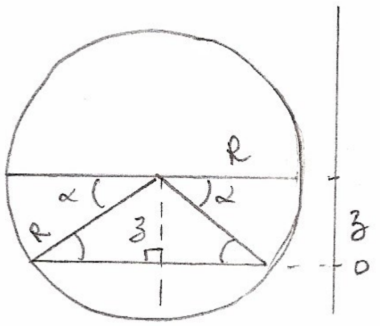
et $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\pi R}{4g}} = \sqrt{\frac{\pi^3 R}{g}}$

A.N : $R = 1\,cm$ $\pi^3 \approx 30$

$g = 10\,m/s^2$

$T_0 = 0{,}17\,s$ $\left(\sqrt{0{,}03} = 0{,}1\sqrt{3}\right)$

e)



$S = 2$ (aire triangle rectangle) ①

$+ 2$ (aire secteur circulaire) ②

① : Aire rectangle : $zR\cos\alpha$

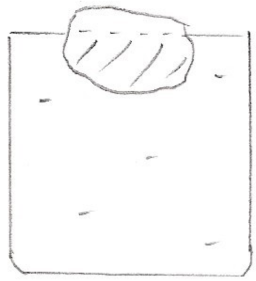
② : Aire proportionnelle à α : si $\alpha = 2\pi$, on a πR^2 donc ② $= 2 \times \frac{1}{2} R^2 \alpha$

avec $\sin\alpha = \frac{z}{R}$; $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$; ① $= z\sqrt{R^2 - z^2}$

donc $S = z\sqrt{R^2 - z^2} + R^2 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{z}{R}\right)$

BOISSONS

Étude commune :



$/// : V$

Équilibre du glaçon
$\vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0}$, où
l'on peut négliger la masse d'air remplacé.
On en tire $m_{glace} = m_{boisson}$ (remplacée)

Cas ① : eau pure $\quad m_g = m_{eau}$

Le glaçon fond : m_g devient de l'eau

$m_{\substack{eau\\fonte}} = m_{\substack{eau\\remplacée}}$, qui occupe donc le même volume.

Le verre est plein à ras bord dans l'état final.

Cas ② : boisson sucrée

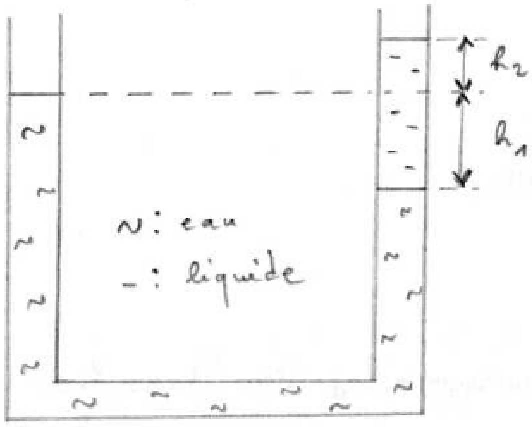
$m_{\substack{eau\\fonte}} = m_{\substack{jus\\remplacé}}$, où la masse volumique de l'eau de fonte est inférieure à celle de la boisson : le volume occupé par l'eau fondue est supérieur à V : le verre déborde.

$\rho_{eau} V_{eau} = \rho_b V$: $V_{eau} = \frac{\rho_b}{\rho_{eau}} . V > V$.

Cas ③ : cocktail

On aura $V_{\substack{eau\ de\\fonte}} = \frac{\rho_b}{\rho_{eau}} . V < V$; le verre n'est pas plein.

Densimètre



(a) $\boxed{d=\frac{\rho}{\rho_0}}$ où ρ_0 est la masse volumique de l'eau.

(b) Notons I un point de l'interface entre les deux liquides et P_0 la pression atmosphérique :
$P_I+\rho_0\, g(-h_1)=P_0$ d'une part
$P_I+\rho\, g(-h_1)=P_0+\rho\, g h_2$ d'autre part.
En soustrayant les deux équations :

$\rho\, g(-h_1)+\rho_0\, g h_1=\rho\, g h_2$ donc $\boxed{d=\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{h_1}{h_1+h_2}=0{,}92}$

(c) Il suffit de permuter les deux liquides sur le schéma : on a alors $\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{h_1}{h_1+h_2}$ donc $\boxed{d=1+\frac{h_2}{h_1}}$

MESURE P_0

1ère situation : Notons P_1 la pression de l'air enfermé sous le mercure.

Système : Mercure, masse $m=(h'-h)S\rho$ où S est la section du tube.

$\overrightarrow{\text{BdF}}$: Poids $\vec{P}=m\vec{g}$

Archimède interdit : mercure non totalement immergé

$\Rightarrow \vec{F}_p = +P_1 S\vec{u}_z - P_0 S\vec{u}_z$ où $\vec{u}_z$ est pris vers le haut

$\overrightarrow{\text{RFD}}$: $\vec{0}=\vec{P}+\vec{F}_p$: $(P_1-P_0)S-(h'-h)S\rho g=0$

donc $P_1=P_0+(h'-h)\rho g$

2^nde situation : même chose avec P_2, pression de l'air au-dessus

$$\vec{F}_p = +P_0 S \vec{u}_z - P_2 S \vec{u}_z$$; le poids reste le même.

$$P_2 = P_0 - (h' - h)\rho g$$

Conservation de n pour l'air enfermé :

$$\underset{(c^{te})}{n} = \frac{P_1 V_1}{RT_0} = \frac{P_2 V_2}{RT_0} \quad \text{avec } V_1 = S h \text{ et } V_2 = S h''$$

$$P_1 h = P_2 h''$$

Combinaison : 3 éq où l'on élimine P_1 et P_2

$$h\left[P_0 + (h' - h)\rho g\right] = h''\left[P_0 - (h' - h)\rho g\right]$$

$$\Longleftrightarrow P_0 = \frac{(h + h'')(h' - h)}{h'' - h}\rho g = 1022 \text{ hPa}$$

Ascension d'un ballon à hydrogène

Un ballon sonde gonflé au dihydrogène, de volume constant V_0, soulève une nacelle et des instruments de mesure destinés à l'expérimentation scientifique. La masse de l'enveloppe du ballon est négligeable.

On considère que l'atmosphère est isotherme, de composition chimique constante, et que l'hydrogène du ballon est toujours à l'équilibre avec l'air. L'intensité de la pesanteur est supposée constante.

Au décollage, l'air est à la pression atmosphérique P_0 et l'hydrogène est à la pression P'_0.

(a) Obtenir les lois d'évolution $P_{air}(z)$ et $\rho_{air}(z)$.

On part de la loi fondamentale de la statique des fluides $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ avec $PV = nRT$ donc $P\frac{m}{\rho} = \frac{m}{M}RT$: $\rho = P\frac{M}{RT}$ soit $H\frac{dP}{dz} + P = 0$ où $H = \frac{RT}{M_{air}g}$ est la hauteur d'échelle.

On en tire $P_{air}(z) = A\exp\left(-\frac{z}{H}\right)$ avec $P_{air}(0) = P_0$: $\boxed{P_{air}(z) = P_0\exp\left(-\frac{z}{H}\right)}$, puis $\boxed{\rho_{air}(z) = \rho_0\exp\left(-\frac{z}{H}\right)}$ avec $\rho_0 = P_0\frac{M_{air}}{RT}$

(b) Référentiel : terrestre supposé galiléen
Système : ballon + enveloppe + charge
BdF :
* poids du ballon $\boxed{\vec{P}=[m+m(\mathrm{H_2})]\vec{g}=-[m+\rho_0(\mathrm{H_2})V_0]g\vec{u}_z}$ qu'on calcule au sol (il ne change pas ensuite).
On a $\boxed{\rho_0(H_2)=P'_0\frac{M(H_2)}{RT}}$
* poussée d'Archimède $\boxed{\vec{\Pi}=\rho_{air}(z)V_0 g\vec{u}_z}$: la poussée d'Archimède sur la charge est nulle puisque son volume est négligé.
Finalement $\boxed{F_z=P_0V_0\frac{M_{air}g}{RT}\exp\left(-\frac{z}{H}\right)-P'_0V_0\frac{M(H_2)g}{RT}-mg}$

(c) Le ballon décolle du sol si $\boxed{F_z(0)\geq 0}$ donc si $\boxed{m(0)\leq\frac{V_0}{RT}[P_0M_{air}-P'_0M(H_2)]}$.

(d) Par le même calcul, on trouve $\boxed{m(z)\leq\frac{V_0}{RT}\left[P_0M_{air}\exp\left(-\frac{z}{H}\right)-P'_0M(H_2)\right]}$

Le terme entre crochets diminue, la contrainte est donc plus dure en altitude qu'au sol : le ballon va atteindre une altitude où il sera à l'équilibre.

ATMOSPHÈRE NON ISOTHERME

1. On combine 2 lois : statique des fluides $\frac{dP}{dz}=-\rho g$
gaz parfaits intensive $P=\rho\frac{RT_0}{M}$

$$\left(\text{en effet } PV=nRT \Leftrightarrow P=\frac{mRT}{MV}\right)$$

où l'on élimine la masse volumique ρ

$\frac{dP}{dz}=-\frac{Mg}{RT_0}P$; $\frac{dP}{dz}+\frac{1}{H}P=0$, équa diff d'ordre 1 homogène linéaire (variable z)

avec la hauteur d'échelle $\boxed{H=\frac{RT_0}{Mg}}$, qui conduit, puisque $P(0)=P_0$

à $P(z)=P_0\exp\left(-\frac{z}{H}\right)$

A.N : $H=9{,}07$ km
⚠ M : en SI

2.a) On obtient alors $\dfrac{dP}{dz} + \dfrac{Mg}{R(T_0 - \lambda z)} P = 0$ où il faut faire apparaître H : $\dfrac{dP}{dz} + \dfrac{1}{H} \dfrac{1}{1 - \lambda \frac{z}{T_0}} P = 0$

<u>Méthode</u> : séparation des variables $\displaystyle\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = \int_0^z - \frac{1}{H} \cdot \frac{dz}{1 - \lambda \frac{z}{T_0}}$

$$\left[\ln P\right]_{P_0}^{P} = -\frac{1}{H} \cdot \left(\frac{-T_0}{\lambda}\right) \cdot \left[\ln\left(1 - \lambda \frac{z}{T_0}\right)\right]_0^z$$

$$\ln P - \ln P_0 = \frac{T_0}{\lambda H} \cdot \left[\ln\left(1 - \lambda \frac{z}{T_0}\right) - \ln 1\right]$$

$$\ln \frac{P}{P_0} = \frac{T_0}{\lambda H} \ln\left(1 - \lambda \frac{z}{T_0}\right)$$ # en prenant exp de chaque côté

2.b) $\dfrac{T_0}{\lambda H} = 6{,}84$ $\quad 1 - \lambda \dfrac{z}{T_0} = 0{,}86$: $P = 0{,}349$ bar

3. z petit : $P = P_0 \left(1 - \dfrac{\lambda z}{T_0} \cdot \dfrac{T_0}{\lambda H}\right) = P_0 \left(1 - \dfrac{z}{H}\right)$ (modèle 2) et $\exp\left(-\dfrac{z}{H}\right) \simeq 1 - \dfrac{z}{H}$ (modèle 1)