

À lire avec soin avant de commencer :

On demande d'encadrer les résultats littéraux en utilisant de la couleur pour les mettre en évidence.
De manière générale, il sera tenu compte dans la notation des qualités de présentation et de rédaction de la copie.
Toutes les affirmations doivent notamment être justifiées avec précision, sauf si indication contraire.

Les résultats doivent toujours être exprimés sous forme littérale avant d'en donner une application numérique (si elle est demandée) : aucun calcul semi-numérique n'est admis. La manipulation des unités dans les applications numériques est imposée.

Le barème est donné à titre indicatif, et pourra être modifié. Les parties sont indépendantes.

I – 20.000 VIEUX SOUS LES MERS**PROPRIÉTÉS**
LE FIGARO

Par Sophie Vincelot, publié le 22 mars 2016

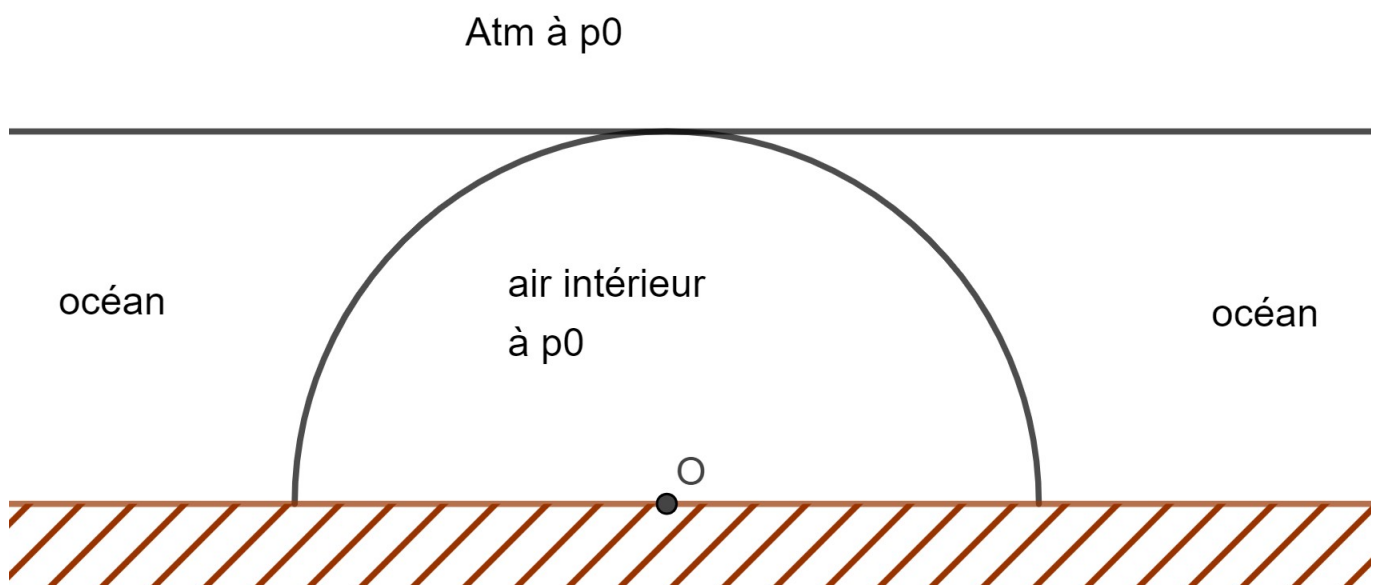
Les cités sous l'eau continuent de faire rêver. Que ce soit dans une bulle ou une sphère transparente, les projets de nouvelles Atlantide fleurissent partout dans le monde. Tour d'horizon des propositions les plus surprenantes.

Montée du niveau des océans, inégalité de l'accès à l'eau potable dans le monde, diminution des ressources en eau... Le 22 mars, les Etats et l'ONU s'emparent des problématiques environnementales lors de la « Journée mondiale de l'eau ». Et l'immobilier s'est saisi du sujet depuis longtemps. La multiplication des projets de villes sous-marines en est l'exemple le plus prégnant.

1. LA VILLE FUTURE EN 2116 SELON SAMSUNG

Une cité entière à l'intérieur d'une bulle suspendue sous l'eau. C'est ce que s'est amusé à prédire Samsung dans 100 ans. L'année dernière, le constructeur sud-coréen a commandé une étude, le **SmartThings Future** [...]

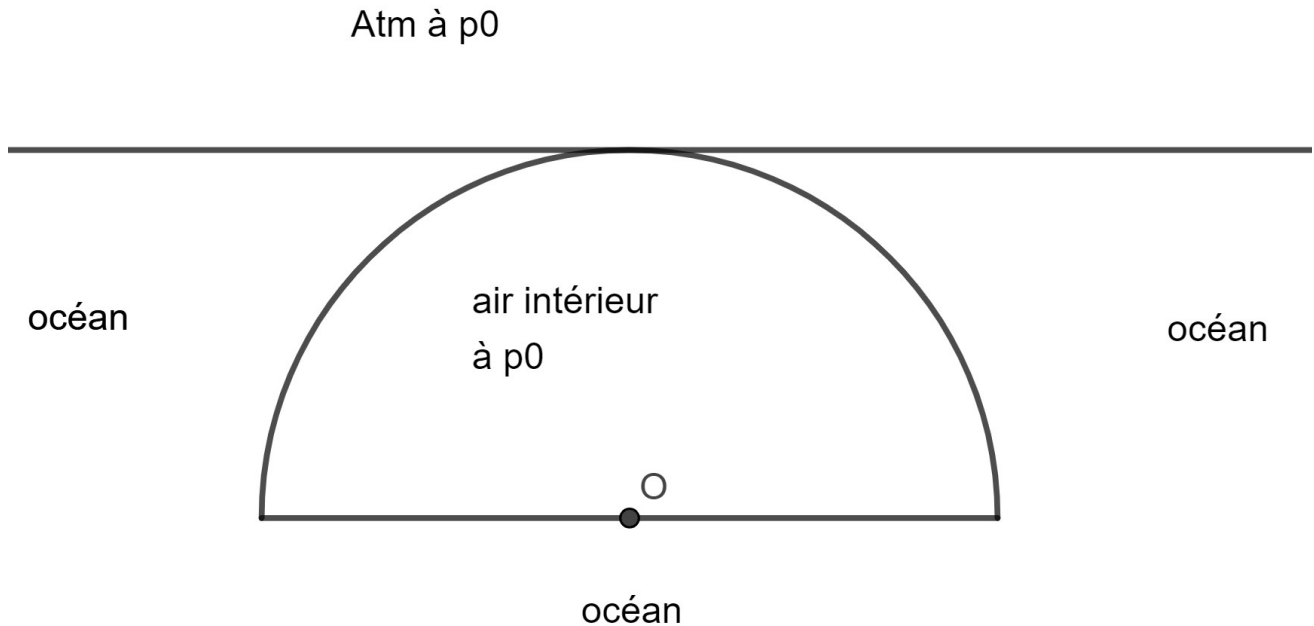
On s'intéresse ici à une ville située à l'intérieur d'un dôme hémisphérique de rayon R , dont le sommet se trouve juste sous la surface de l'eau, pour une raison de standing élevé du penthouse : le rayonnement solaire est très vite absorbé avec la profondeur, d'autant plus que sa longueur d'onde est grande (le rouge disparaît à une profondeur environ égale à 2 mètres).



A/ Force de pression sur le dôme

1. Expliquer pourquoi on ne peut pas appliquer ici le théorème d'Archimède.

On peut toutefois l'appliquer sur le nouveau système suivant, équivalent du précédent, mais où l'on a retiré (en pensée) le plancher océanique :



La masse volumique de l'océan est notée ρ et on rappelle que le volume d'une boule de rayon R est $V_b = \frac{4}{3}\pi R^3$, que sa surface est $S_b = 4\pi R^2$, et que la surface d'un disque de rayon R est $S_d = \pi R^2$.

L'intensité de la pesanteur est notée g .

2. Obtenir l'expression vectorielle de la poussée d'Archimède exercée sur le système ci-dessus, en introduisant un vecteur unitaire pertinent.
3. L'origine des altitudes est fixée au fond de l'océan : obtenir l'expression de la pression dans l'eau en fonction de l'altitude, puis la force de pression exercée par l'océan sous le dôme (sur le nouveau système).
4. En déduire l'expression vectorielle de la force de pression exercée par l'océan sur le système étudié (dôme ancré au sol).

On donne le calcul suivant (qu'on ne cherchera pas à justifier), correspondant au calcul de la force de pression exercée sur l'intérieur d'une demi sphère par l'air enfermé, air à une pression uniforme à p_0 :

$$d\vec{S} = R d\theta \cdot R \sin \theta d\varphi \cdot \vec{e}_r ; \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = \cos \theta : F_{pz} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} p_0 R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi = 2\pi R^2 p_0 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\pi/2}$$

5. En déduire la force de pression totale exercée sur le dôme, par tous les fluides.

B/ Mission impossible : attaque du dôme (résolution de problème)

Une équipe de plongeurs terroristes (ou révolutionnaires selon les sources) cherche à faire sauter le dôme.

Dans un souci de discrétion, l'équipe plonge en apnée (plongée sans bouteilles).

La masse volumique typique d'un être humain est $\rho_H = 985 \text{ kg/m}^3$: pour descendre, chaque plongeur doit donc embarquer une masse m_{pb} de plomb qui sert de lest. On note V_{Ho} le volume du plongeur à l'air libre, incluant le volume de ses poumons V_{Po} – le volume du plomb est négligeable. La pression de l'air dans ses poumons est en permanence celle de l'environnement.

1. Obtenir l'expression de la masse minimale de lest pour que le plongeur puisse commencer sa descente dans l'océan.
2. Cette condition étant juste réalisée, obtenir l'expression de la force totale (hors frottements) exercée par l'océan sur le plongeur en fonction de son altitude z . L'équilibre de la question précédente est-il stable ?

II – UN MODÈLE DE L'ATMOSPHÈRE TERRESTRE

Dans tout le problème, le champ de pesanteur est supposé constant et uniforme, de valeur $g=9,81\text{ m/s}^2$, et l'altitude est repérée par un axe z , vertical dirigé vers le haut.

La courbure du sol terrestre est négligée : on travaille en coordonnées cartésiennes.

L'air est assimilé, quelles que soient les conditions, à un gaz parfait diatomique de masse molaire moléculaire $M=29,0\text{ g/mol}$.

La constante des gaz parfaits est $R=8,3144\text{ J/mol.K}$.

A/ Préliminaires

1. Obtenir l'équation différentielle vérifiée par la pression p de l'atmosphère, en fonction de son profil de température $T(z)$.
2. Dans le cas de l'atmosphère isotherme, modélisée par une température constante $T(z)=T_0$, résoudre cette équation, en introduisant la pression au sol p_0 et une hauteur caractéristique H de l'atmosphère. AN pour H , avec $T_0=15^\circ\text{C}$. Interpréter physiquement H , en justifiant l'affirmation.

B/ Modèle isentropique de l'atmosphère

On rappelle ici la variation de la fonction entropie pour un gaz parfait de coefficient adiabatique $\gamma=1,40$, lors d'une transformation quelconque:

$$\Delta S = C_V \Delta [\ln(p V^\gamma)]$$

où C_V est la capacité calorifique à volume constant du gaz, p sa pression, et V son volume.

1. Montrer qu'on peut exprimer la variation d'entropie sous la forme $\Delta S = C_P \Delta [\ln(T p^k)]$, où C_P est la capacité calorifique à pression constante du gaz ; on donnera l'expression de k en fonction du coefficient γ .

On s'intéresse à un modèle d'atmosphère tel que l'entropie (molaire ou massique) de l'atmosphère est supposée indépendante de la coordonnée verticale z .

On a donc $\frac{d}{dz}(T p^k)=0$ – on utilisera l'expression de k dans la suite si elle a été obtenue.

2. À partir de la loi de la statique des fluides et de la relation précédente, obtenir l'expression du profil de température $T(z)$, en fonction de z , de la température T_0 à la surface $z=0$ de la Terre, de l'accélération g de la pesanteur, de sa masse molaire M et de γ .
3. Faire l'application numérique pour le gradient de température $\Gamma_{\text{adiab}} = \frac{dT}{dz}$ dans ce modèle, en degrés Celsius par kilomètre.

On souhaite justifier la pertinence de ce modèle d'atmosphère isentropique.

Dans ce but, on considère que l'atmosphère a un profil de température quelconque $T_{\text{atm}}(z)$, différent de celui calculé précédemment, toujours fonction décroissante de l'altitude z .

On se place au voisinage de l'altitude z_i : il est alors possible d'assimiler la fonction $T_{\text{atm}}(z)$ à une droite de coefficient directeur $T'_{\text{atm}}(z_i)$ (cf **figure 1 de l'annexe**).

On considère une particule de fluide, initialement à l'altitude z_i et à la température $T_{p,i}=T_{\text{atm}}(z_i)=T_i$ et à la pression de l'environnement p_i .

On suppose qu'une perturbation externe déplace la particule fluide vers le haut, jusqu'à l'altitude $z_f=z_i+dz$, de façon adiabatique et réversible, sa pression restant à tout instant celle de l'atmosphère environnante.

4. Justifier que l'entropie de la particule reste constante pendant son mouvement.

Par un calcul identique à ce qui précède, sa température vérifie donc la loi $dT_p = \Gamma_{\text{adiab}} dz$.

On suppose que la température atmosphérique diminue moins vite avec l'altitude que dans le modèle isentropique : on a alors $|T'_{\text{atm}}(z)| < |\Gamma_{\text{adiab}}|$.

- Sur la **figure 1 de l'annexe à rendre avec la copie**, on a représenté le profil de température de l'atmosphère T_{atm} , linéarisé au voisinage de z_i . Compléter (seule importe la position respective des droites tracées) l'annexe en traçant l'allure de la fonction $T_p(z)$, évolution linéarisée de la température de la particule, au voisinage de z_i . Placer sur le graphique sa température $T_{p,f}$ à l'altitude $z_f > z_i$, et la comparer avec celle de l'atmosphère environnante.
- En raisonnant sur la masse volumique de la particule, dire, avec une preuve rigoureuse, si ce profil de température atmosphérique correspond à une atmosphère stable ou instable.

On donne sur la **figure 2 de l'annexe** le profil de température de l'atmosphère, calculé en prenant en compte l'absorption et la réémission du rayonnement dans les couches de l'atmosphère.

- En prenant $|\Gamma_{\text{adiab}}| = 10^\circ\text{C/km}$, obtenir par une construction graphique précise **sur l'annexe** l'altitude z_T (tropopause) à laquelle l'atmosphère est à la limite de la stabilité, et indiquer (en justifiant) sur l'annexe les altitudes où l'atmosphère est stable ou instable ($z > z_T$ ou $z < z_T$).

III – INTERFÉRENCES À LA SURFACE DE L'EAU

On considère deux points S_1 et S_2 , distantes de $a = 5\lambda$, qui frappent en même temps la surface de l'eau à la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

On fixe à zéro leur phase à l'origine des dates aux sources.

On considère dans un premier temps un point M de la surface, situé à équidistance des deux sources : cette distance vaut a , le triangle $S_1 S_2 M$ est équilatéral.

On note A_0 les amplitudes communes des deux ondes au point M .

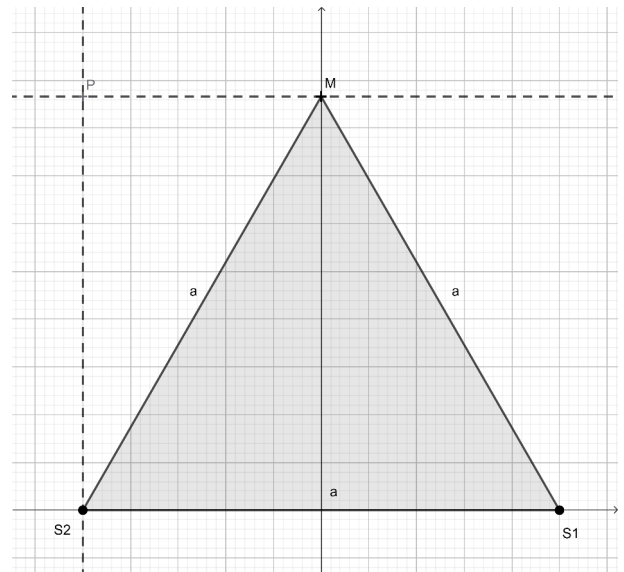
- En M , les interférences sont-elles constructives, destructives, ou ni l'un ni l'autre ? Justifier précisément. Quelle est l'amplitude de l'onde somme ?

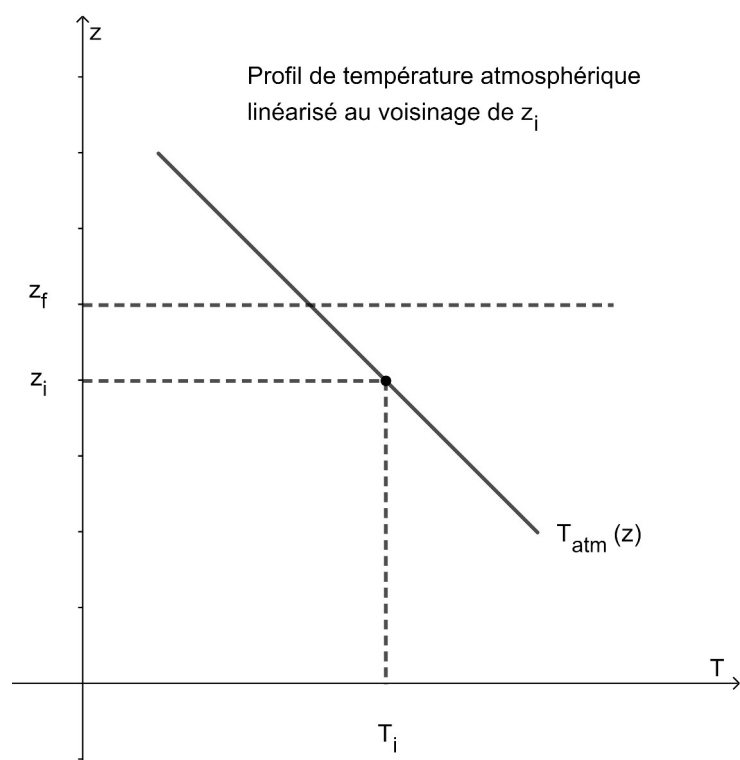
L'énergie se répartit à la surface de l'eau : l'amplitude de chaque onde est inversement proportionnelle à la distance qu'elle a parcouru depuis sa source.

- Obtenir phases à l'origine des dates et amplitudes de chacune des ondes lorsqu'elles arrivent au point P .

On donnera le résultat en fonction de A_0 pour les amplitudes, et les phases à l'origine des dates en degrés dans le domaine principal $]-180^\circ, +180^\circ]$.

- En déduire toutes les propriétés de l'onde somme au point P indiqué sur le schéma ci-contre : amplitude et phase à l'origine des dates.



Annexe à rendre avec la copie**NOM, Prénom :**Partie II, figure 1Partie II, figure 2