

MOMENT MAGNÉTIQUE : UNE DÉMO PLUS GÉNÉRALE

1. Préliminaires mathématiques

Vecteur surface pour un circuit rectangulaire (de côtés a et b)

Le produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$

- a pour norme la surface définie par le parallélogramme formé par les deux vecteurs ($\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = a b \sin(\vec{a}, \vec{b})$, donc base fois hauteur : vérifier avec un schéma) ;
- est perpendiculaire au plan vectoriel $(\vec{a}, \vec{b})$ défini par les vecteurs.

En choisissant bien l'ordre pour respecter les conventions d'algèbre, on voit que le vecteur surface est alors $\boxed{\vec{S} = \vec{a} \wedge \vec{b}}$.

Double produit vectoriel

On a $\boxed{\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}}$ dont la démonstration directe est fastidieuse, mais qui peut s'interpréter, et dont on peut retrouver la position des signes + et -.

Interprétation : $(\vec{b} \wedge \vec{c})$ est perpendiculaire au plan $(\vec{b}, \vec{c})$, et comme $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ est perpendiculaire à ce vecteur, le vecteur $\vec{a}$ est dans le plan $(\vec{b}, \vec{c})$: il se décompose de façon unique sur cette base.

Signes : on vérifie simplement avec la base OND $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) = \pm (\vec{i} \cdot \vec{i}) \vec{j} \pm (\vec{i} \cdot \vec{j}) \vec{i} = \pm \vec{j} \pm \vec{0}$ d'une part, et $\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$, d'autre part.

Donc les signes sont - puis +.

2. Moment vectoriel des forces de Laplace sur une spire rectangulaire

Rappel : moment vectoriel en O d'une force $\vec{F}$: $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$

Comme les forces de Laplace forment un couple = somme nulle et moment non nul, on peut prendre le point O n'importe où :

$$\sum_k \vec{M}_O(\vec{F}_k) = \sum_k \vec{OM}_k \wedge \vec{F}_k = \sum_k (\vec{OO}' + \vec{O'M}_k) \wedge \vec{F}_k = \vec{OO}' \wedge \sum_k \vec{F}_k + \sum_k \vec{O'M}_k \wedge \vec{F}_k = \vec{0} + \sum_k \vec{M}_{O'}(\vec{F}_k).$$

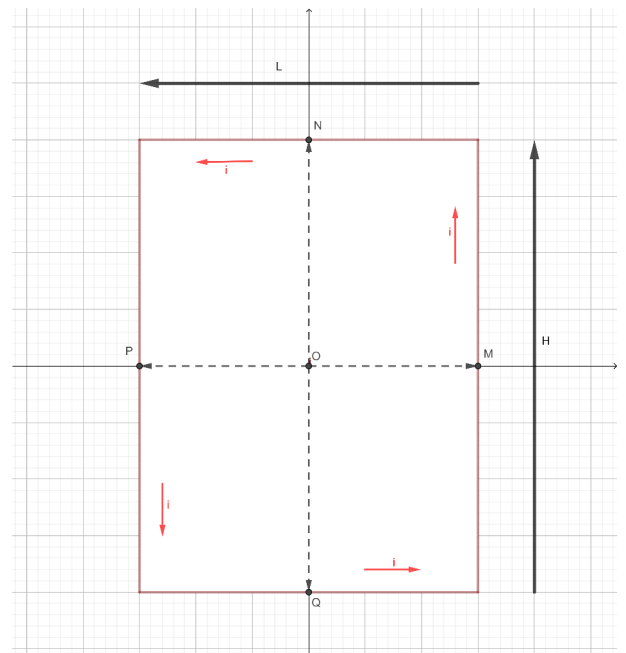
On choisit le point O au centre du rectangle.

$$\begin{aligned} \text{On a alors } \vec{M}_{O, \text{LAP}} = \vec{\Gamma}_O = & -\frac{\vec{L}}{2} \wedge (i \vec{H} \wedge \vec{B}) \quad (M) \\ & + \frac{\vec{L}}{2} \wedge (-i \vec{H} \wedge \vec{B}) \quad (N) \\ & + \frac{\vec{H}}{2} \wedge (i \vec{L} \wedge \vec{B}) \quad (P) \\ & - \frac{\vec{H}}{2} \wedge (-i \vec{L} \wedge \vec{B}) \quad (Q) \end{aligned} \quad \text{soit}$$

$$\vec{\Gamma}_O = i [\vec{H} \wedge (\vec{L} \wedge \vec{B}) - \vec{L} \wedge (\vec{H} \wedge \vec{B})].$$

On obtient après développement que

$$\vec{\Gamma}_O = i [(\vec{H} \cdot \vec{B}) \vec{L} - (\vec{L} \cdot \vec{B}) \vec{H}].$$



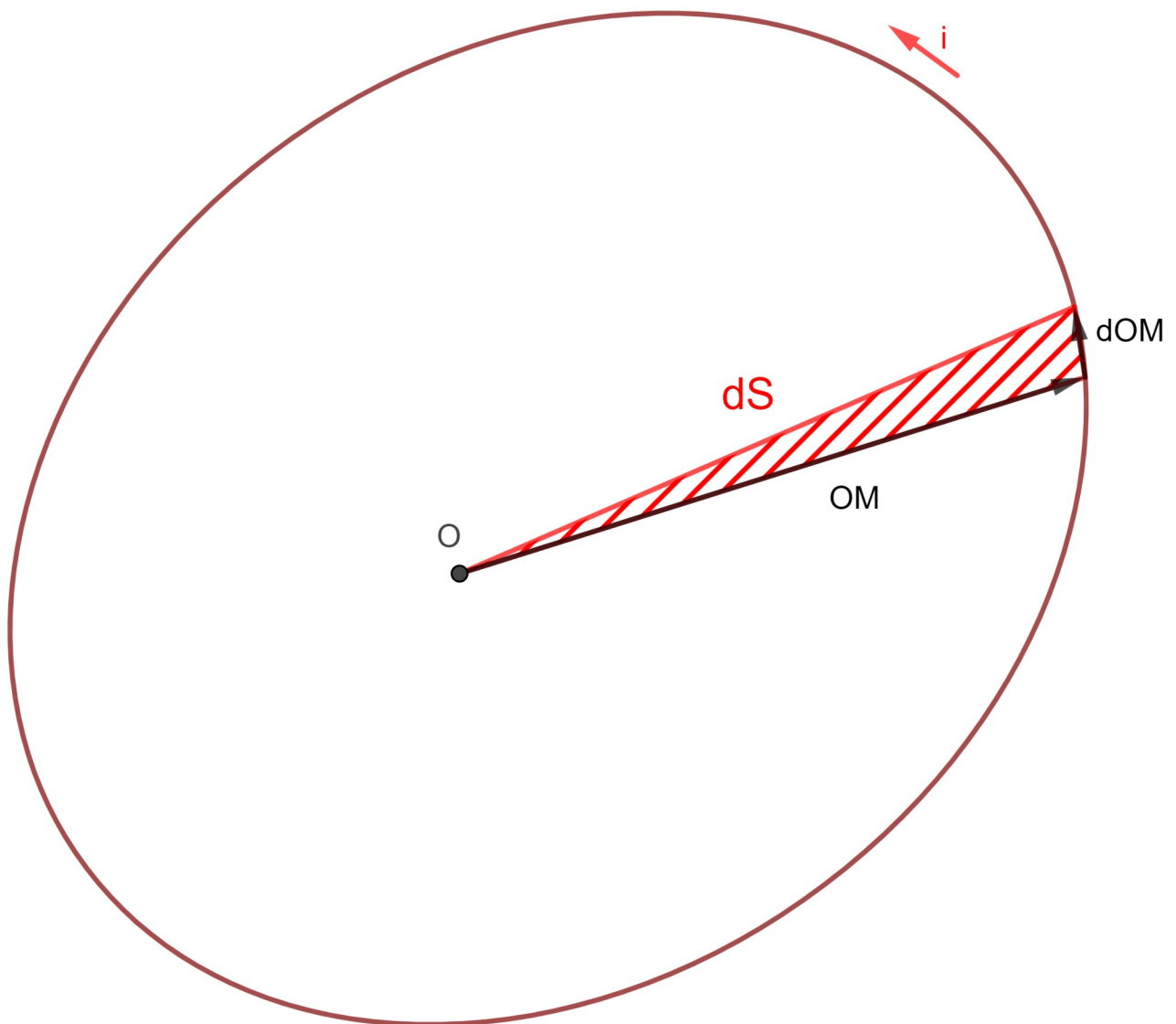
Calculons maintenant $\vec{\mu} \wedge \vec{B} = i \vec{S} \wedge \vec{B}$: $\vec{\mu} \wedge \vec{B} = i (\vec{H} \wedge \vec{L}) \wedge \vec{B} = -i \vec{B} \wedge (\vec{H} \wedge \vec{L})$ (anticommutativité).

En développant, on retrouve la même expression.

Cette démonstration est plus générale : $\vec{B}$ peut être quelconque, on n'a pas besoin de l'hypothèse que $\vec{B} \perp (\Delta)$, axe de rotation de la spire.

3. Généralisation supplémentaire

Pour une spire quelconque et plane, on se convainc aisément que $\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_{(C)} \vec{OM} \wedge d\vec{OM}$ grâce au schéma ci-dessous :



C'est une bonne révision de la loi des aires... Cette expression permet également de définir le vecteur surface pour une spire fermée mais non plane.

On laisse au lecteur la démonstration que $\vec{\Gamma}_O = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$ reste valable dans ce cas : le principe du calcul est le même qu'au 2.