

AUTOUR DE LA FONCTION TANGENTE HYPERBOLIQUE

1) Fonction tangente hyperbolique.

On considère la fonction tangente hyperbolique, notée th , définie par

$$\text{th} : x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}.$$

- a) Étudier la parité de la fonction tangente hyperbolique.

La fonction th est impaire comme quotient de la fonction sh impaire et de la fonction ch paire.

L'ensemble de définition de la fonction th , à savoir $\mathbb{R}$, est symétrique par rapport à 0. **Indispensable.**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{th}(-x) = \frac{\text{sh}(-x)}{\text{ch}(-x)} = \frac{-\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = -\text{th}(x).$$

REMARQUE. Inutile de revenir aux expressions avec $\exp$ ou de prouver parité de ch et imparité de sh : c'est du cours.

- b) Montrer la formule d'addition de ch : pour tous réels x et y , on a $\text{ch}(x+y) = \text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y)$.

On admet que pour tous réels x et y , on a $\text{sh}(x+y) = \text{ch}(x)\text{sh}(y) + \text{sh}(x)\text{ch}(y)$.

En déduire la formule d'addition de la fonction th .

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{e^x e^y + e^{-x} e^{-y} + e^x e^{-y} + e^{-x} e^y}{4} + \frac{e^x e^y + e^{-x} e^{-y} - e^x e^{-y} - e^{-x} e^y}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)} + e^{x-y} + e^{y-x}}{4} + \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)} - e^{x-y} - e^{y-x}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} \\ &= \text{ch}(x+y) \end{aligned}$$

De même,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{ch}(x)\text{sh}(y) + \text{sh}(x)\text{ch}(y) = \text{sh}(x+y)$$

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{th}(x+y) &= \frac{\text{sh}(x+y)}{\text{ch}(x+y)} \\ &= \frac{\text{ch}(x)\text{sh}(y) + \text{sh}(x)\text{ch}(y)}{\text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y)} \\ &= \frac{\frac{\text{ch}(x)\text{sh}(y) + \text{sh}(x)\text{ch}(y)}{\text{ch}(x)\text{ch}(y)}}{\frac{\text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y)}{\text{ch}(x)\text{ch}(y)}} \\ &= \frac{\frac{\text{sh}(y)}{\text{ch}(y)} + \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}}{1 + \frac{\text{sh}(x)\text{sh}(y)}{\text{ch}(x)\text{ch}(y)}} \\ &= \frac{\text{th}(x) + \text{th}(y)}{1 + \text{th}(x)\text{th}(y)}. \end{aligned}$$

- c) Justifier que la fonction th est dérivable et déterminer une expression de sa dérivée en fonction de th .

La fonction th est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\text{Sa dérivée est } \text{th}' = \frac{\text{sh}' \text{ch} - \text{sh} \text{ch}'}{\text{ch}^2} = \frac{\text{ch}^2 - \text{sh}^2}{\text{ch}^2} = 1 - \left(\frac{\text{sh}}{\text{ch}}\right)^2 = 1 - \text{th}^2.$$

- d) Rappeler la formule fondamentale de la trigonométrie hyperbolique.

En déduire une autre expression simple de la dérivée de la fonction th .

Formule fondamentale de la trigonométrie hyperbolique : $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$.

$$\text{On en déduit } \text{th}' = 1 - \text{th}^2 = 1 - \frac{\text{sh}^2}{\text{ch}^2} = \frac{\text{ch}^2 - \text{sh}^2}{\text{ch}^2} = \frac{1}{\text{ch}^2}.$$

- e) Étudier les variations de la fonction tangente hyperbolique et déterminer ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

En déduire les bornes de la fonction tangente hyperbolique et déterminer si ce sont des extremums.

- D'après la question précédente, la dérivée $\text{th}' = \frac{1}{\text{ch}^2}$ est strictement positive sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

On en déduit que la fonction th est strictement croissante.

2

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x (1 - e^{-2x})}{e^x (1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x} (e^{2x} - 1)}{e^{-x} (e^{2x} + 1)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1. \text{ On peut aussi utiliser l'imparité.}$$

REMARQUE. En présence d'une somme, on factorise par le terme prépondérant au voisinage du point indiqué au sens où le quotient des autres avec celui-ci tend vers 0 au voisinage du point indiqué.

REMARQUE. La limite ne peut pas dépendre de x :  crire $\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$ n'a aucun sens.

- Ainsi, comme la fonction est croissante, les bornes de la fonction th sont -1 et 1 .
Ce ne sont pas des extremums car ils ne sont pas atteints, la fonction étant strictement monotone.

REMARQUE. En général, une limite peut tout à fait être atteinte, même une infinité de fois.

1

- f) Donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe de la fonction th au point d'abscisse 0.

1

Une équation de la tangente est $y = \text{th}'(0)x + \text{th}(0)$, c'est-à-dire $y = x$ car $\text{th}(0) = 0$ et $\text{th}'(0) = 1 - \text{th}^2(0) = 1$.

3

- g) Déterminer la position relative de la courbe représentative de la fonction th par rapport à cette tangente.

1

REMARQUE. Pour établir une inégalité, si les opérations algébriques échouent, on fait une étude de fonctions.

La fonction $\text{th} - \text{id}_{\mathbb{R}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $1 - \text{th}^2 - 1 = -\text{th}^2 \leq 0$.

Ainsi, la fonction $\text{th} - \text{id}_{\mathbb{R}}$ est décroissante.

Comme elle vaut 0 en 0, on en déduit que $\text{th} - \text{id}_{\mathbb{R}} \geq 0$ sur $\mathbb{R}_-$ et $\text{th} - \text{id}_{\mathbb{R}} \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

Autrement dit, $\text{th} \geq \text{id}_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}_-$ et $\text{th} \leq \text{id}_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que la courbe représentative de th est au-dessus de sa tangente en $(0, 0)$ sur $\mathbb{R}_-$ et en dessous sur $\mathbb{R}_+$.

1

REMARQUE. Attention à la nature des objets : c'est la fonction $\text{th} - \text{id}$ qui est dérivable, pas le nombre $\text{th}(x) - x$.

De plus, on n'écrit pas $(\text{th}(x) - x)'$. Il faut aussi penser à bien quantifier : $\forall x \in]-1, 1[, (\text{th} - \text{id})'(x) = \dots$

2) Réciproque de la fonction tangente hyperbolique.

On ne cherchera pas à déterminer une expression de sa réciproque dans cette sous-partie.

1

- a) Montrer que th est bijective de $\mathbb{R}$ dans un ensemble I à déterminer. **On note $\text{th} : \mathbb{R} \rightarrow I$.** Préciser $\text{th} \circ \text{th}^{-1}$ et $\text{th}^{-1} \circ \text{th}$.

2

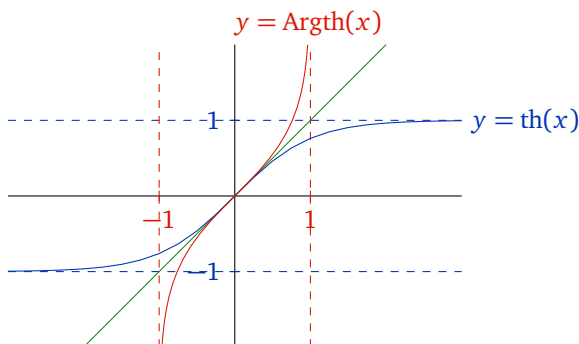
La fonction th est strictement monotone et continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans

$$\text{th}(]-\infty, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}[=]-1, 1[$$

REMARQUE. Aucune raison que le quotient de deux fonctions bijectives soit bijective. En plus, ch ne l'est pas.

2

- b) Tracer les courbes représentatives des fonctions th et th^{-1} sur un même dessin.



REMARQUE. Bien faire apparaître :

2

- l'allure et les asymptotes horizontales de la fonction th ;
- l'allure et les asymptotes verticales de la fonction Argth ;
- les positions relatives des courbes par rapport à la droite d'équation $y = x$.
En particulier, les courbes ne s'intersectent qu'à l'origine du repère.

2

- c) Montrer que la fonction th^{-1} est impaire.

L'intervalle $] -1, 1[$ est symétrique par rapport à 0.

De plus, par imparité de th , pour tout réel x dans $] -1, 1[$, $\text{th}(\text{Argth}(-x)) = -x = -\text{th}(\text{Argth}(x)) = \text{th}(-\text{Argth}(x))$.

En appliquant aux membres extrémaux la fonction Argth , on obtient $\text{Argth}(-x) = -\text{Argth}(x)$.

2

3

- d) Montrer que la fonction th^{-1} est dérivable et calculer sa dérivée.

La fonction th est bijective et dérivable, et sa dérivée $\text{th}' = \frac{1}{\text{ch}^2}$ ne s'annule pas.

D'après le théorème de dérivation de la réciproque, th^{-1} est dérivable et

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (\text{th}^{-1})'(x) = \frac{1}{\text{th}'(\text{th}^{-1}(x))} = \frac{1}{1 - \text{th}^2(\text{th}^{-1}(x))} = \frac{1}{1 - (\text{th}(\text{th}^{-1}(x)))^2} = \frac{1}{1 - x^2}$$

1

2

REMARQUE. On applique des théorèmes. Les théorèmes ont des hypothèses.

Il faut préciser les hypothèses et les vérifier si nécessaire.

3) Fonction argument tangente hyperbolique.

On considère la fonction argument tangente hyperbolique

$$\operatorname{Argth} : x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

Dans cette partie, on montre que la fonction Argth est la réciproque de la fonction th (on ne le sait donc pas encore).

2

- a) Déterminer, pour x dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, le signe strict de $\frac{1+x}{1-x}$. En déduire l'ensemble de définition de la fonction Argth .

À l'aide d'un tableau de signes, on montre facilement que $\frac{1+x}{1-x}$ est strictement positif si et seulement si x est dans $] -1, 1[$, nul si $x = -1$, non défini si $x = 1$ et strictement négatif si x est dans $] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$.
Finalement, comme la fonction $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ensemble de définition de la fonction Argth est $] -1, 1[$.

1

- b) Montrer que la fonction Argth est impaire.

L'ensemble de définition $] -1, 1[$ de la fonction Argth est symétrique par rapport à 0. De plus,

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \operatorname{Argth}(-x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1-(-x)} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \right) = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = -\operatorname{Argth}(x).$$

REMARQUE. Il est indispensable d'indiquer au moins une étape intermédiaire et pas seulement écrire les définitions de $\operatorname{Argth}(-x)$ et $-\operatorname{Argth}(x)$ car le résultat est donné ici.

3

- c) Montrer que la fonction Argth est dérivable et calculer sa dérivée.

La fonction Argth est dérivable comme quotient et composée de fonctions dérivables et on a :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \operatorname{Argth}'(x) = \frac{1}{2} \frac{\frac{1(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} \frac{2}{(1-x)^2} \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1-x^2}$$

- d) En déduire que $\operatorname{th}^{-1} = \operatorname{Argth}$. Vous pouvez admettre que leurs dérivées sont égales si vous n'avez pas réussi à le montrer.

Les fonctions ont la même dérivée et sont définies sur un même intervalle donc elles sont égales à une constante près.

De plus, $\operatorname{th}(0) = 0$ donc $\operatorname{th}^{-1}(0) = 0$, et $\operatorname{Argth}(0) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+0}{1-0} \right) = 0$ donc cette constante est nulle.

REMARQUE. Il ne suffit pas que les dérivées soient les mêmes pour que les fonctions soient les mêmes : il faut préciser

- que l'on travaille sur un intervalle (elles diffèrent d'une constante sur chaque intervalle) ;
- la valeur de la constante (sur tout intervalle, ici $] -1, 1[$) en évaluant en un point ou avec une limite.

REMARQUE. Chapitre équations différentielles : le problème de Cauchy $y' = \frac{1}{1-x^2}$ avec condition initiale $y(0) = 0$ admet une unique solution sur tout intervalle de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ contenant 0 (ici : $] -1, 1[$).

5

- e) Retrouver ce résultat en résolvant, pour tout réel y , l'équation $\operatorname{Argth}(x) = y$ d'inconnue x dans $] -1, 1[$.

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in] -1, 1[, \quad y = \operatorname{Argth}(x) &\iff y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \\ &\iff 2y = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \\ &\iff e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} && \text{car la fonction exponentielle est bijective} \\ &\iff e^{2y}(1-x) = 1+x && \text{on cherche à isoler } x \\ &\iff e^{2y} - 1 = x(e^{2y} + 1) \\ &\iff \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} = x && \text{car } e^{2y} + 1 \neq 0 \\ &\iff \frac{e^y(e^y - e^{-y})}{e^y(e^y + e^{-y})} = x \\ &\iff \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x \\ &\iff \frac{2 \operatorname{sh}(y)}{2 \operatorname{ch}(y)} = x \\ &\iff \frac{\operatorname{sh}(y)}{\operatorname{ch}(y)} = x \\ &\iff \operatorname{th}(y) = x \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction $\operatorname{Argth} :] -1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est bijective, de réciproque la fonction $\operatorname{th} : \mathbb{R} \rightarrow] -1, 1[$.

4) Fonctions cotangente hyperbolique et argument cotangente hyperbolique.

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right).$$

2

- a) Préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f . Que représente f par rapport à la fonction argument tangente hyperbolique ?
Montrer que pour tout réel x non nul dans $\mathcal{D}_f$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$.

La fonction f est définie sur l'ensemble des réels x tels que (bien distinguer les deux conditions) :

- $1-x$ soit non nul, c'est-à-dire que x différent de 1 ;
- $\left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ soit strictement positif, c'est-à-dire non nul, ce qui revient à dire que x est différent de -1 .

1

Finalement, la fonction f est définie sur $\mathcal{D}_f \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Pour tout réel x non nul dans $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{1}{x}$ est dans $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et on a :

1

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \right| \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}} \right| \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{x+1}{1-x} \right| \right) = f(x)$$

3

- b) Dresser le tableau de variations de la fonction f et préciser ses limites.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par quotient et composées de fonctions dérivables (la fonction valeur absolue n'étant pas évaluée en 0) et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{2} \frac{1-x+1+x}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1-x^2}.$$

1

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ de dérivée $f' : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.

On montre facilement comme précédemment que la fonction f est impaire. On étudie les variations sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ et on complète par imparité.

La dérivée de la fonction f est strictement positive sur $[0, 1[$ et strictement négative sur $]1, +\infty[$.

On en déduit que la fonction f est

- strictement décroissante sur l'intervalle $] -\infty, -1[$;
- strictement croissante sur l'intervalle $] -1, 1[$
- strictement décroissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

1

- On a $\frac{1+x}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1$ donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln(|-1|) = \ln(1) = 0$.
- On a $\frac{1+x}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} -\infty$ et $\frac{1+x}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$ donc $\left| \frac{1+x}{1-x} \right| \xrightarrow{x \rightarrow 1} +\infty$

Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \ln(z) = +\infty.$$

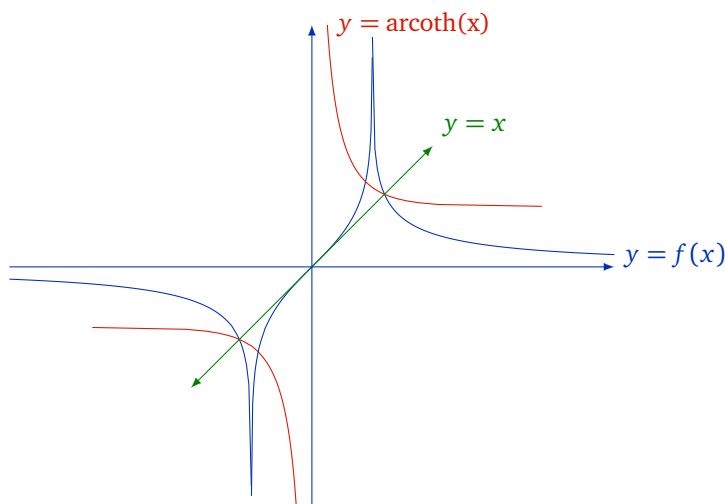
On peut en déduire les limites en -1 et en $-\infty$ par imparité :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1} -\infty \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0.$$

1

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	0	$-\infty$	0	$+\infty$	0

- 2) c) Tracer la courbe représentative de la fonction f .



2

- 1) d) Montrer que pour tout réel x , on a $f(\text{th}(x)) = x$.

th est à valeurs dans $] -1, 1[$ donc $f \circ \text{th} = f|_{]-1,1[} \circ \text{th} = \text{Argth} \circ \text{th} = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

- 2) e) Montrer que la fonction $\text{th} \circ f$ est bornée sur $\mathcal{D}_f$. En déduire que la proposition « $\forall x \in \mathcal{D}_f, (\text{th} \circ f)(x) = x$ » est fausse.

La fonction th est bornée par -1 et 1 donc la fonction $\text{th} \circ f$ également.

En effet, $(\text{th} \circ f)(\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}) \subset \text{th}(\mathbb{R}) =] -1, 1[$.

La fonction identité de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ n'est pas bornée donc ne peut être égale à la fonction $\text{th} \circ f$ qui l'est.

- 3) f) Calculer, pour tout réel x dans $\mathcal{D}_f$, le réel $(\text{th} \circ f)(x)$.

Soit x un réel dans $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Si x est dans $] -1, 1[$, alors $(\text{th} \circ f)(x) = (\text{th} \circ \text{Argth})(x) = x$.

Si x est dans $] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$, alors $\frac{1}{x}$ est dans $] -1, 1[$.

On en déduit

$$\begin{aligned} \forall x \in] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[, \quad (\text{th} \circ f)(x) &= \text{th}(f(x)) \\ &= \text{th}\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right) && \text{car } f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \text{th}\left(\text{Argth}\left(\frac{1}{x}\right)\right) && \text{car } \frac{1}{x} \in] -1, 1[\\ &= (\text{th} \circ \text{Argth})\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x} && \text{car } \text{th} \circ \text{Argth} = \text{id}_{]-1,1[}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad (\text{th} \circ f)(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in] -1, 1[\\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[\end{cases}$$

- 4) g) Montrer la restriction de f à $] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$, appelée fonction argument cotangente hyperbolique, est bijective. Exprimer sa réciproque, appelée fonction cotangente hyperbolique, en fonction de th et tracer sa courbe représentative.

La restriction à $] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$ de la fonction f est égale à $f \circ i$ donc à $\text{Argth} \circ i$ où $i :] -1, 1[\setminus \{0\} \rightarrow] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$ désigne la fonction inverse, bijective de bijection réciproque la fonction inverse, encore notée i (mais dont les ensembles de départ et d'arrivée sont échangés).

En tant que composée d'applications bijectives, l'application $f|_{]-\infty, -1[\cup] 1, +\infty[} = \text{Argth} \circ i$ est bijective de réciproque

$$(\text{Argth} \circ i)^{-1} = i^{-1} \circ \text{Argth}^{-1} = i \circ \text{th} = \frac{1}{\text{th}}.$$

REMARQUE. Cette réciproque est appelée cotangente hyperbolique et notée coth .

La restriction de f à $] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$ est appelée argument cotangente hyperbolique (notée arccoth).

Courbe représentative : voir ci-dessus.

2