

DEVOIR D'ANTICIPATION

APPLICATIONS LINÉAIRES DE $\mathbb{R}$ DANS $\mathbb{R}$

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Pour aller plus vite, on pourra utiliser directement la propriété suivante qui est équivalente aux deux précédentes :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que la fonction nulle $0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ et l'application $\text{id}_{\mathbb{R}}$ identité de $\mathbb{R}$ sont linéaires.

REMARQUE. Il faut bien différencier ici les opérations sur les réels et les opérations sur les fonctions.

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}(x) + 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}(y) = \lambda 0 + 0 = 0 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}(\lambda x + y)$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \text{id}_{\mathbb{R}}(x) + \text{id}_{\mathbb{R}}(y) = \lambda x + y = \text{id}_{\mathbb{R}}(\lambda x + y)$

2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire. Montrer que $f(0) = 0$.

Indication. Écrire la première ou la deuxième propriété pour des valeurs particulières de λ , x et y .

En prenant $\lambda = 0$ et $x = 1$ (ou n'importe quel autre réel), on obtient $f(0) = f(0 \cdot 1) = 0 \cdot f(1) = 0$.

3) Caractérisation des applications linéaires. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Montrer que f est linéaire si et seulement si c'est une homothétie : il existe un réel a tel que pour tout réel x , $f(x) = ax$.

Indication. Le sens réciproque est facile. Pour le sens direct, utiliser la deuxième propriété de manière astucieuse.

Remarque. La définition d'application linéaire présentée ici correspond ainsi à la notion de fonction linéaire vue au collège.

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction linéaire. Alors pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ et tout réel λ , $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.
Alors en particulier (en prenant $\lambda = x$, $x = 1$, $y = 0$), pour tout réel x , $f(x \cdot 1) = x f(1) = f(1)x$.
Par conséquent, il existe un réel a , égal à $f(1)$, tel que pour tout réel x , $f(x) = ax$ donc f est une homothétie.
- Soit f une homothétie. Alors il existe un réel a tel que pour tout réel x , $f(x) = ax$.
Soient x et y deux réels. Soit λ un réel. Alors $f(\lambda x + y) = a(\lambda x + y) = \lambda ax + ay = \lambda f(x) + f(y)$.

4) Déterminer, en utilisant la définition de la linéarité, si l'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est stable par

a) multiplication scalaire (autrement dit, si f est dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et si μ est un réel, la fonction μf est-elle dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?) ;

Soit μ un réel. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrons que l'application $\mu \cdot f$ est linéaire.

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (\mu \cdot f)(\lambda x + y) &= \mu(f(\lambda x + y)) \\ &= \mu(\lambda f(x) + f(y)) \\ &= \lambda \mu f(x) + \mu f(y) \\ &= \lambda(\mu \cdot f)(x) + (\mu \cdot f)(y) \end{aligned}$$

b) addition (autrement dit, si f et g sont dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $f + g$ est-elle dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?) ;

Soient f et g deux applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrons que l'application $f + g$ est linéaire.

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (f + g)(\lambda x + y) &= f(\lambda x + y) + g(\lambda x + y) \\ &= \lambda f(x) + f(y) + \lambda g(x) + g(y) \\ &= \lambda(f(x) + g(x)) + f(y) + g(y) \\ &= \lambda(f + g)(x) + (f + g)(y) \end{aligned}$$

c) multiplication (autrement dit, si f et g sont dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $f \times g$ est-elle dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?) ;

Non : Les produit des applications linéaires $\text{id}_{\mathbb{R}}$ et $\text{id}_{\mathbb{R}}$ est la fonction carré qui n'est pas linéaire ($3 \cdot 1)^2 \neq 3 \cdot 1^2$.

REMARQUE. Obtenir des expressions différentes ne suffit pas : les nombres peuvent quand même être égaux.

d) composition (autrement dit, si f et g sont dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $g \circ f$ est-elle dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?) ;

Soient f et g deux applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrons que l'application $g \circ f$ est linéaire.

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (g \circ f)(\lambda x + y) &= g(f(\lambda x + y)) \\ &= g(\lambda f(x) + f(y)) && \text{par linéarité de } f \\ &= \lambda g(f(x)) + g(f(y)) \\ &= \lambda(g \circ f)(x) + (g \circ f)(y) && \text{par linéarité de } g \end{aligned}$$

Les deux premiers points permettent de montrer que $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

5) Déterminer l'ensemble des applications de $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bijectives.

Si une application linéaire est bijective, sa réciproque est-elle linéaire ?

Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont de la forme $x \mapsto ax$. Si $a = 0$, l'application est nulle donc non bijective.

Elles sont bijectives si et seulement si a est non nul, auquel cas leur réciproque est l'application $x \mapsto \frac{1}{a}x$ qui est linéaire.

SOUS-ESPACES VECTORIELS DE $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ est un **sous-espace vectoriel** si et seulement si

- il contient l'élément nul $(0, \dots, 0)$;
- il est stable par combinaison linéaire :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u, v) \in F^2, \quad \lambda u + v \in F$$

On peut montrer que les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, les droites passant par $0_{\mathbb{R}^3}$, les plans contenant $0_{\mathbb{R}^3}$ et $\mathbb{R}^3$.

6) Montrer que l'ensemble $F \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Indication. Il s'agit d'un ensemble défini en compréhension.

Montrer que $0_{\mathbb{R}^3}$ est dans F . Pour cela, montrer que ses composantes vérifient la relation.

Considérer un réel λ ainsi que deux éléments $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ dans F .

Traduire l'appartenance à F en donnant une relation entre les composantes de u puis entre les composantes de v .

Montrer que $\lambda u + v$ est dans F .

Pour cela, déterminer ses composantes, c'est-à-dire l'écrire sous la forme $(\cdot, \cdot, \cdot)$ et vérifier la condition d'appartenance à F .

Plus généralement, on peut montrer par une preuve semblable que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

L'ensemble F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ par définition.

- L'ensemble F contient l'élément nul $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$ car $0 + 0 + 0 = 0$.
- Montrons que l'ensemble F est stable par combinaisons linéaires.
Soit λ un réel. Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ dans F , de sorte que $x + y + z = 0$ et $x' + y' + z' = 0$.
Montrons que $\lambda u + v$ est dans F , c'est-à-dire que la somme de ses composantes est nulle.
On commence par déterminer ses composantes : $\lambda u + v = \lambda(x, y, z) + (x', y', z') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$.
On vérifie que $(\lambda x + x') + (\lambda y + y') + (\lambda z + z') = \lambda(x + y + z) + (x' + y' + z') = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$.

7) Montrer que l'ensemble

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1)) \stackrel{\text{def}}{=} \{a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \{(a + b, a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Indication. Il s'agit d'un ensemble défini de manière paramétrique.

Montrer que $0_{\mathbb{R}^3}$ est dans G en écrivant $0_{\mathbb{R}^3}$ sous la forme indiquée en précisant les valeurs de a et b correspondantes.

Considérer un réel λ ainsi que deux éléments u et v dans G .

Traduire l'appartenance à G en introduisant des réels a et b pour u , ainsi que a' et b' pour v .

Montrer que $\lambda u + v$ est dans G en écrivant $\lambda u + v$ sous la forme indiquée en précisant les valeurs de a et b correspondantes.

Plus généralement, on peut montrer par une preuve semblable que l'ensemble $\text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ des combinaisons linéaires de vecteurs $v_1, \dots, v_p$ de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

G est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ en tant qu'ensemble formé de combinaisons linéaires d'éléments de $\mathbb{R}^3$.

- $0_{\mathbb{R}^3}$ est dans G car $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) = 0(1, 1, 0) + 0(1, 0, 1)$ (obtenu avec $a = 0$ et $b = 0$).
- Montrons que l'ensemble G est stable par combinaisons linéaires.

REMARQUE. Cela revient à dire que les combinaisons linéaires des vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$ sont aussi des combinaisons linéaires de $(1, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$, ce qui est trivial. Il suffit de l'écrire.

Soient u dans G . Alors il existe deux réels a et b tels que $u = a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1)$

Soit v dans G . Alors il existe deux réels a' et b' tels que $v = a'(1, 1, 0) + b'(1, 0, 1)$.

Soit λ un réel.

Montrons que $\lambda u + v$ est dans G , c'est-à-dire qu'il existe deux réels a'' et b'' tels que $\lambda u + v = a''(1, 1, 0) + b''(1, 0, 1)$.

$$\begin{aligned} \lambda u + v &= \lambda(a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1)) + a'(1, 1, 0) + b'(1, 0, 1) \\ &= (\lambda a + a')(1, 1, 0) + (\lambda b + b')(1, 0, 1). \end{aligned}$$

APPLICATIONS LINÉAIRES, NOYAU ET IMAGE

Nous étudierons au second semestre la notion d'espace vectoriel.

Pour ce devoir maison, il suffit de savoir que $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des fonctions, l'ensemble des fonctions continues, l'ensemble des fonctions dérivables de dérivées continues sont des espaces vectoriels.

Un sous-ensemble G d'un espace vectoriel E est un **sous-espace vectoriel** de E si et seulement si

- il contient l'élément nul noté 0_E ;
il s'agit de 0 , $(0, \dots, 0)$, la suite nulle, la matrice nulle, le polynôme nul ou l'application nulle (selon le contexte) ;
- il est stable par combinaison linéaire :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u, v) \in G^2, \quad \lambda u + v \in G$$

Ainsi, un sous-espace vectoriel est un ensemble non vide, stable par addition et par multiplication scalaire.

Une application $f : E \rightarrow F$ entre deux espaces vectoriels E et F est dite **linéaire** si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u, v) \in E^2, \quad f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$$

Autrement dit, effectuer une combinaison linéaire puis calculer son image revient au même que calculer les images puis effectuer la combinaison linéaire.

On appelle **noyau** d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$ l'ensemble des antécédents de l'élément nul de F par f :

$$\text{Ker}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in E \mid f(u) = 0_F\} \quad (\text{ensemble défini en compréhension})$$

On appelle **image** d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$ l'ensemble des images des éléments de E par f :

$$\text{Im}(f) \stackrel{\text{def}}{=} f(E) = \{f(u) \mid u \in E\} \quad (\text{ensemble défini de manière paramétrique})$$

GÉNÉRALITÉS SUR LES APPLICATIONS LINÉAIRES

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

8) Montrer que $f(0_E) = 0_F$.

On peut le montrer par homogénéité : $f(0_E) = f(0 \cdot 0_E) = 0 \cdot f(0_E) = 0_F$.

Par additivité, on a aussi : $f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E) = 2f(0_E)$ et en soustrayant $f(0_E)$, on obtient $f(0_E) = 0_F$.

9) Montrer que l'application f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Indication.

Pour le sens direct, utiliser la définition de l'injectivité et la question précédente.

Pour le sens réciproque, utilisera la caractérisation usuelle de l'injectivité puis considérer la différence de deux vecteurs.

- Supposons que l'application f est injective. Montrons que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ par double inclusion.

On a $f(0_E) = 0_F$ donc le vecteur nul 0_E est dans le noyau de l'application f .

Soit u un vecteur de $\text{Ker}(f)$. Alors $f(u) = 0_F = f(0_E)$ donc u est un antécédent de 0_F par f .

Comme f est injective, le vecteur nul 0_F a au plus un antécédent par f donc $u = 0_E$.

Finalement, $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

- Réciproquement, supposons que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$. Montrons que l'application f est injective.

Soient u et v deux vecteurs de E tels que $f(u) = f(v)$. Montrons que $u = v$.

Alors $f(u - v) = f(u) - f(v) = 0_F$ donc $u - v$ est dans le noyau $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ de f .

Ainsi, $u - v = 0_E$ donc $u = v$, ce qui prouve que l'application f est injective.

10) Montrer que le noyau $\text{Ker}(f)$ de f est un sous-espace vectoriel de E .

Indication. Utiliser une méthode similaire à la question 6.

- Le noyau $\text{Ker}(f)$ de f est inclus dans E .
- On a $f(0_E) = 0_F$ donc le vecteur nul 0_E appartient au noyau $\text{Ker}(f)$.
- Montrons que pour tous vecteurs u et v dans $\text{Ker}(f)$ et tout scalaire λ , le vecteur $\lambda u + v$ est dans $\text{Ker}(f)$.
Soient u et v deux vecteurs de $\text{Ker}(f)$, de sorte que $f(u) = 0_F$ et $f(v) = 0_F$. Soit λ un scalaire.
Par linéarité de f , on a : $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v) = \lambda 0_F + 0_F = 0_F$.
Ainsi, le vecteur $\lambda u + v$ appartient bien à $\text{Ker}(f)$.

11) Montrer que l'image $\text{Im}(f)$ de f est un sous-espace vectoriel de F .

Indication. Utiliser une méthode similaire à la question 7.

- On a clairement $\text{Im}(f) \subset F$.
- On a $f(0_E) = 0_F$ donc le vecteur nul 0_F de F appartient à $\text{Im}(f)$.
- Montrons que pour tous vecteurs v_1 et v_2 dans $\text{Im}(f)$ et tout scalaire λ , $\lambda v_1 + v_2$ est dans $\text{Im}(f)$.
Soit λ un scalaire. Soient v_1 et v_2 deux vecteurs de $\text{Im}(f)$.
Alors il existe deux vecteurs u_1 et u_2 de E tels que $f(u_1) = v_1$ et $f(u_2) = v_2$.
Ainsi, $\lambda v_1 + v_2 = \lambda f(u_1) + f(u_2) = f(\lambda u_1 + u_2)$, par linéarité de f .
Par conséquent, le vecteur $\lambda v_1 + v_2$ est l'image d'un vecteur de E donc est dans $\text{Im}(f)$.

APPLICATIONS LINÉAIRES DE $\mathbb{R}^n$ DANS $\mathbb{R}^m$

12) Pour chacune des applications linéaires suivantes, déterminer le noyau et l'image puis étudier l'injectivité et la surjectivité :

- $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x + y + z$;
 - Le noyau $\text{Ker}(f_1)$ est l'hyperplan d'équation cartésienne $x + y + z = 0$.
Le noyau n'est pas réduit à $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ car il contient $(-1, 1, 0)$ donc l'application f_1 n'est pas injective.
 - L'image de f_1 est $\text{Im}(f_1) = \{x + y + z \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \mathbb{R}$ (tout réel peut s'écrire comme la somme de trois réels).
L'application f_1 est donc surjective.
- $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + y, x, y)$;
 - Le noyau $\text{Ker}(f_2)$ est l'ensemble des solutions du système linéaire
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x = 0, \text{ c'est-à-dire le singleton } \{0_{\mathbb{R}^2}\}. \\ y = 0 \end{cases}$$

Le noyau est égal à $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$ donc l'application f_2 est injective.
 - $\text{Im}(f_2) = \{(x + y, x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 1, 0) + y(1, 0, 1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1)) \neq \mathbb{R}^3$
- $f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x + y, y + z, x + z)$.
 - Le noyau $\text{Ker}(f_3)$ est l'ensemble des solutions du système linéaire
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0, \text{ c'est-à-dire le singleton } \{0_{\mathbb{R}^3}\}. \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Le noyau est égal à $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ donc l'application f_3 est injective.
 - $\text{Im}(f_3) = \{(x + y, y + z, x + z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$
 $= \{x(1, 0, 1) + y(1, 1, 0) + z(0, 1, 1) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)).$
On peut montrer que $\text{Im}(f_3) = \mathbb{R}^3$ donc que l'application f_3 est surjective.
Par exemple, en résolvant le système précédent avec second membre (a, b, c) .

Indications. Écrire le noyau comme ensemble des solutions d'un système linéaire homogène. Écrire l'image sous la forme $\text{Vect}(\cdot)$

DÉRIVATION

On note $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables de dérivées continues.

On considère l'application $D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \mapsto f'$.

13) a) Expliquer pourquoi l'application D est linéaire.

C'est une propriété de la dérivation : la dérivée d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des dérivées :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (f, g) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad D(\lambda f + g) = (\lambda f + g)' = \lambda f' + g' = \lambda D(f) + D(g).$$

b) Déterminer le noyau de l'application D . L'application D est-elle injective ?

Le noyau de D est l'ensemble des fonctions dérivables (de dérivées continues) sur l'intervalle $\mathbb{R}$ de dérivée nulle, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

Comme le noyau n'est pas réduit à la fonction nulle, l'application D n'est pas injective.

REMARQUE. Deux fonctions dérivables qui ont la même dérivée ne sont pas nécessairement égales : elles sont égales à un élément du noyau de D près, c'est-à-dire à une constante près.

c) Déterminer l'image de l'application D . L'application D est-elle surjective ?

Indication. On admet que toute fonction continue admet une primitive.

La dérivée d'une application de classe $\mathcal{C}^1$ (dérivable de dérivée continue) est continue, par définition. Réciproquement, toute fonction continue est la dérivée d'une de ses primitives, qui est dérivable par définition, de dérivée continue.

Ainsi, $\text{Im}(D) = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \neq \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

REMARQUE. La fonction valeur absolue est la dérivée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

La fonction partie entière n'est pas la dérivée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

d) Soient f et g deux éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Exprimer $D(g \circ f)$ à l'aide de f , g , $D(f)$ et $D(g)$.

$$D(g \circ f) = ((D(g)) \circ f) \times D(f)$$

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

14) On note $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que l'application $I : \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$ est linéaire, non injective et surjective.

- L'application I est linéaire : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (f, g) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), I(\lambda f + g) = \int_0^1 (\lambda f + g) = \lambda \int_0^1 f + \int_0^1 g = \lambda I(f) + I(g)$.
- Son noyau est l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ d'intégrale nulle.
Il contient la fonction $f : x \mapsto 1 - 2x$ non nulle. Donc l'application I n'est pas injective.
- Pour tout réel λ , la fonction $\lambda \text{id}_{[0,1]} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est un antécédent de λ par I donc l'application I est surjective.