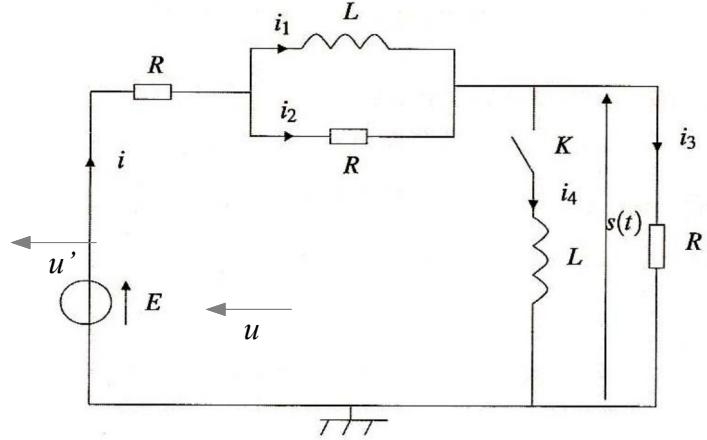


## CORRECTION RL ORDRE 2



**1.** Déterminer les valeurs des intensités  $i_4$ ,  $i_1$ ,  $i$ ,  $i_2$  et  $i_3$  à l'instant  $t = 0^+$ .

Continuités : courants dans les bobines, avec K ouvert depuis longtemps.

Donc  $i_4(0^-) = 0$ , continu en 0 :  $i_4(0^+) = 0$  ; par ailleurs, avant fermeture, on est en RP, L est équivalent à un fil : la tension  $u$  aux bornes de  $R//L$  est donc nulle et  $i_2(0^-) = \frac{u}{R} = 0$ .

On a donc  $i(0^-) = i_1(0^-) = i_3(0^-)$ . La loi des mailles en  $0^-$  est  $E = u' + u + s = Ri + 0 + Ri$  : les courants valaient donc  $\frac{E}{2R}$ .

Seul  $i_1$  est continu :  $i_1(0^+) = \frac{E}{2R}$ .

Comme, en  $0^+$ ,  $i_4 = 0$ , on a  $i_3 = i$ , et la loi des mailles donne maintenant, puisque  $i_2 = i - \frac{E}{2R}$   
 $E = Ri + R\left(i - \frac{E}{2R}\right) + Ri \Leftrightarrow \frac{3E}{2} = 3Ri$  :  $i(0^+) = i_3(0^+) = \frac{E}{2R}$ , et on trouve que  $i_2(0^+) = 0$ , fortuitement continu (ainsi que  $u$ ).

**2.** Déterminer les valeurs de la tension  $s$  et des intensités  $i_2$ ,  $i$ ,  $i_1$ ,  $i_3$  et  $i_4$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.

Les bobines sont équivalentes à des fils :  $s_\infty = 0$  et  $u_\infty = 0$  : on en déduit avec les lois d'Ohm que  $i_{3\infty} = 0$  et  $i_{2\infty} = 0$ .

La loi des mailles donne  $E = Ri + 0 + 0$ , donc  $i_\infty = i_{1\infty} = i_{4\infty} = \frac{E}{R}$ .

**3.** Déterminer les relations entre  $s$  et  $i_3$  puis entre  $s$  et  $i_4$ .

Loi des dipôles :  $s = Ri_3$  et  $s = L \frac{di_4}{dt}$

**4.** Établir la relation entre  $R$ ,  $L$ ,  $s$ ,  $\frac{ds}{dt}$  et  $\frac{di}{dt}$ .

$E$  n'intervient pas donc pas de loi des mailles... Les dérivées de  $i$  et de  $s$  suggèrent une loi des

nœuds dérivée, en relation avec la question précédente :

$$i = i_3 + i_4 \Leftrightarrow \frac{di}{dt} = \frac{di_3}{dt} + \frac{di_4}{dt} : \boxed{\frac{di}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{L} s}$$

**5.** Même question pour  $R, L, i_2, \frac{di_2}{dt}$  et  $\frac{di}{dt}$ .

On tente l'autre loi des nœuds et ça marche :  $\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}$  avec  $u = R i_2 = L \frac{di_1}{dt}$  donc

$$\frac{di}{dt} = \frac{R}{L} i_2 + \frac{di_2}{dt}$$

**6.** Déterminer la relation entre  $\frac{dE}{dt}, R, L, s, i_2$  et  $\frac{ds}{dt}$ .

Forcément la loi des mailles dérivée :  $\frac{dE}{dt} = \frac{du'}{dt} + \frac{du}{dt} + \frac{ds}{dt}$  avec  $u' = R i$ ,  $u = R i_2$  donc :

$$\frac{dE}{dt} = R \frac{di}{dt} + R \frac{di_2}{dt} + \frac{ds}{dt}.$$

$\frac{di}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{L} s$  ne pose pas de problème, mais on veut  $i_2$  dans l'expression finale et non pas  $\frac{di_2}{dt}$ , ce dernier valant (Q5) :  $\frac{di_2}{dt} = \frac{di}{dt} - \frac{R}{L} i_2$ .

$$\text{Donc } \frac{dE}{dt} = \left( \frac{ds}{dt} + \frac{R}{L} s \right) + R \left( \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{L} s - \frac{R}{L} i_2 \right) + \frac{ds}{dt} : \frac{dE}{dt} = 3 \frac{ds}{dt} + 2 \frac{R}{L} s - \frac{R^2}{L} i_2$$

**7.** Établir la relation entre  $R, L, s, \frac{ds}{dt}, \frac{d^2s}{dt^2}, \frac{dE}{dt}$  et  $\frac{d^2E}{dt^2}$ .

Ne pas oublier l'objectif : la dernière variable à éliminer est  $i_2$ , qui, lorsqu'on veut l'exprimer en fonction de  $s$  seulement, est liée par l'équadiff  $\frac{R}{L} i_2 + \frac{di_2}{dt} = \frac{di}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{L} s$

$$\text{D'après la Q6, on a } \frac{R^2}{L} i_2 = 3 \frac{ds}{dt} + 2 \frac{R}{L} s - \frac{dE}{dt} \text{ donc } \frac{R^2}{L} \frac{di_2}{dt} = 3 \frac{d^2s}{dt^2} + 2 \frac{R}{L} \frac{ds}{dt} - \frac{d^2E}{dt^2}.$$

$$\text{Donc, dans l'équation précédente : } \left( \frac{3}{R} \frac{ds}{dt} + \frac{2}{L} s - \frac{1}{R} \frac{dE}{dt} \right) + \frac{L}{R^2} \left( 3 \frac{d^2s}{dt^2} + 2 \frac{R}{L} \frac{ds}{dt} - \frac{d^2E}{dt^2} \right) = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{L} s$$

qu'on va multiplier par  $\frac{R^2}{L}$  pour avoir un coefficient 1 devant  $\frac{d^2E}{dt^2}$  :

$$\boxed{3 \frac{d^2s}{dt^2} + 4 \frac{R}{L} \frac{ds}{dt} + \frac{R^2}{L^2} s = \frac{d^2E}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dE}{dt}}$$

(Aide d'analyse dimensionnelle :  $L/R$  a la dimension d'un temps, on l'obtient avec le circuit simple E,L,R série)

**8.** En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $s$  sachant que le générateur de tension est idéal de tension à vide  $E$ .

$$E \text{ étant une constante, ses dérivées sont nulles : } \boxed{3 \frac{d^2s}{dt^2} + 4 \frac{R}{L} \frac{ds}{dt} + \frac{R^2}{L^2} s = 0}$$