DM 9 – CHUTES DANS LE CHAMP DE PESANTEUR → 19/01/26

A/ Parabole de sûreté (sans frottements)

On considère un boulet tiré de l'origine des coordonnées, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$, faisant l'angle α avec l'horizontale.

On suppose la valeur de la vitesse v_0 fixée.

1. Retrouver l'expression de la trajectoire $z(x)$ obtenue, en fonction de v_0, g, et $\tan\alpha$.
2. Retrouver l'expression de la flèche maximale h.

On considère un point quelconque $M(x_0, z_0)$ du plan, et on cherche à quelle condition ce point *M* peut être touché par le boulet.

3. *M* se trouve sur l'équation de la trajectoire : en déduire la relation entre x_0, z_0, h et $\tan\alpha$, qu'on notera *t* pour simplifier.

Il s'agit donc d'une équation sur la variable *t*, de degré 2.

4. Sans chercher ses solutions, donner à quelle condition mathématique elle a au moins une solution.

   Traduire cette condition sous la forme $z_0 \leq f(x_0)$ où l'on identifiera la fonction *f*.
5. Tracer en tirets l'allure de la fonction $z = f(x)$, puis expliquer où doivent se trouver les points du plan pour être à l'abri du tir.
6. Tracer également l'allure de quelques trajectoires du boulet, pour diverses valeurs intéressantes de α.

B/ Introduction à la balistique extérieure

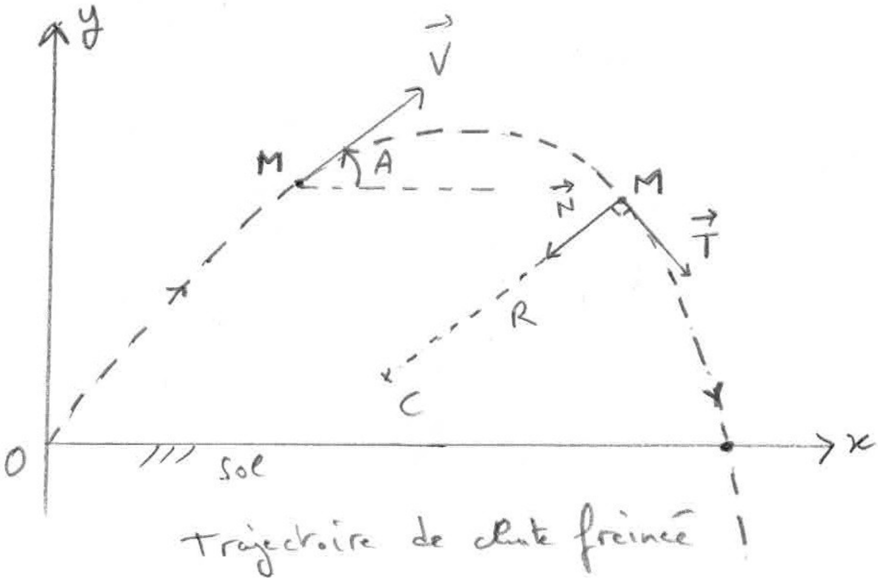
On appelle *balistique extérieure* l'étude des mouvements de chute dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme, où le système *M* assimilé à un point matériel de masse *m* est soumis à des frottements fluides d'expressions diverses : (a) aucun frottement, (b) frottements visqueux, (c) frottements turbulents, (d) forme généralisée.

Ce terme s'oppose à la *balistique intérieure* qui s'intéresse à l'optimisation du lancer du projectile (étude physico-chimique à l'intérieur du canon typiquement).

On travaille en coordonnées cartésiennes où l'axe (Ox) est horizontal, et l'axe (Oy) vertical vers le haut, définissant le plan du mouvement.

On note $\vec{V}$ le vecteur vitesse de *M* à tout instant, et *A* l'angle orienté entre l'axe (Ox) et le vecteur vitesse $\vec{V}$.

L'indice « 0 » concerne les conditions initiales ; on a notamment dans toutes les situations $\vec{OM}_0 = \vec{0}$ et $A_0 \in]0; \frac{\pi}{2}[$.



1. Cas (a) : frottements négligés
   a) Par une étude brève mais précise, obtenir les expressions du vecteur vitesse $\vec{V}$ et du vecteur position $\vec{OM}$ en fonction de la date *t*, du vecteur vitesse initiale $\vec{V}_0$ et du champ de pesanteur $\vec{g}$.
   b) En déduire le vecteur vitesse lors du retour au sol, noté $\vec{V}_S$, sous forme de vecteur colonne, dans la base des coordonnées cartésiennes (x,y), en fonction de V_0 et A_0.

c) Déduire des questions précédentes l'énergie mécanique de M au début du mouvement et lors du retour au sol. Justifier physiquement le résultat obtenu.

2. Cas (b) : frottements visqueux, de forme $-\alpha\vec{V}$

On redonne l'expression du vecteur vitesse en fonction du temps $\vec{V}=(\vec{V}_0-\vec{V}_\infty)e^{-\frac{t}{\tau}}+\vec{V}_\infty$, obtenue par étude dynamique. On ne cherchera pas à démontrer ce résultat ici.

a) Avec le minimum de calcul, identifier en fonction des données les expressions de τ et du vecteur $\vec{V}_\infty$.

b) Quelle est la valeur de l'angle A_∞ ?

c) En supposant que la date de retour au sol est très grande devant τ : $t_S \gg \tau$, montrer que $t_S=\tau\left(1+\frac{V_0 \sin A_0}{\tau g}\right)$.

d) Comparer à nouveau les énergies mécaniques au début à la fin du mouvement (au sol). Justifier physiquement.

3. Cas (d) : expression générale des frottements

Les frottements sont opposés au mouvement, de norme posée égale à $f(V)=mgr(V)$, où $r(V)$ est une fonction sans unité de la valeur de la vitesse, et où les constantes m, g sont factorisées artificiellement pour simplifier les calculs ultérieurs.

On travaille maintenant dans la base de Frenet, voir la **figure précédente**, où $\vec{T}$ est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire, et $\vec{N}$ le vecteur normal à $\vec{T}$ et dirigé vers le centre de courbure C de la trajectoire.

On peut alors assimiler au voisinage de M le mouvement à un mouvement circulaire de rayon $R=CM$.

a) Démontrer avec soin, en s'appuyant notamment sur un nouveau schéma clair, qu'on obtient le système d'équations suivant : $\begin{cases} \frac{dV}{dt}=-g\sin A-g\,r(V) \\ \frac{V^2}{R}=-V\frac{dA}{dt}=g\cos A \end{cases}$.

On admet ici que le vecteur vitesse tend vers une limite $\vec{V}_\infty$.

b) Déduire de l'expression des frottements la limite de la fonction r : $r_\infty=\lim_{t\to\infty} r(V)$ (où $V=V(t)$), ainsi que la valeur de l'angle limite A_∞ à partir du système précédent.

L'élimination du temps aboutit à l'équation générale dite *équation de la balistique* $\frac{d(V\cos A)}{dA}=V\,r(V)$.

Combinée à la seconde équation $\frac{dA}{dt}=-\frac{g}{V}\cos A \Leftrightarrow \frac{dt}{dA}=-\frac{V}{g\cos A}$, elle permet d'obtenir avec une méthode numérique (pas-à-pas) la date t en fonction de l'angle A, ainsi que la norme de la vitesse V.

c) Que devient l'équation de la balistique en l'absence de frottements ? Justifier.

On admet l'écriture physicienne de la règle de composition de la dérivation pour une expression quelconque X fonction de la seule variable A elle-même fonction du temps t : $\frac{dX}{dA}=\frac{dX}{dt}\frac{dt}{dA}$.

d) Montrer en utilisant les équations de Frenet que $\frac{d(V\cos A)}{dA}$ redonne bien $V\,r(V)$.