Modèle de Thomson

1. L'énoncé impose les coordonnées cartésiennes, et on obtient très simplement :

$$\begin{cases} \ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\omega_0^2 x=-\dfrac{eE_0}{m}\cos\omega t \\ \ddot{y}+2\alpha\dot{y}+\omega_0^2 y=0 \\ \ddot{z}+2\alpha\dot{z}+\omega_0^2 z=0 \end{cases}$$

2. En régime permanent ne restent plus que les SP des équadiffs obtenues : elles sont d'ordre 2, à coefficients constants positifs, donc les solutions générales homogènes tendent vers 0.

   Il n'y a donc aucun mouvement sur *y* et sur *z* en RP, et la SP sur *x* doit être trouvée en passant dans les complexes, car c'est une sinusoïde de pulsation égale à celle de l'excitation, donc du champ électrique, soit ω.

3. On peut donc poser $x(t)=X\cos(\omega t+\varphi)$ soit $\underline{x}(t)=X\exp i(\omega t+\varphi)=\underline{X}\exp i\omega t$ pour déterminer l'amplitude $X=|\underline{X}|=\dfrac{eE_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}}$.

   L'accélération est la dérivée seconde de la position, donc par les complexes, on trouve que l'amplitude est multipliée par ω^2 (le signe disparaît) :

$$A=\frac{eE_0\omega^2}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}}$$

4. On garde le terme dominant au dénominateur : $A=\dfrac{eE_0\omega^2}{m\omega_0^2}$

5. La puissance rayonnée est donc proportionnelle à ω^4 donc beaucoup plus importante (16 fois) pour le violet que pour le rouge : le violet de la lumière blanche est donc rayonné dans toutes les directions, le ciel semble bleu violet, et le soleil jaune orange (couleur complémentaire du bleu violet).

Mouvement palet

1. RFD sur x = cours : $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k_0}{m}}$, $K=\dfrac{\alpha_F}{m}$, $x_{éq}=l_0$

2. Equadiff d'ordre avec second membre. Selon le signe du discriminant Δ de l'éq homogène, on a 3 possibilités : Δ>0 => régime apériodique, Δ=0 => régime critique, Δ<0 => régime pseudopériodique.

3. Δ=0 : $K^2-4\omega_0^2=0$, et comme tout est positif : $K=2\omega_0$ donc $\alpha_F=2\sqrt{k_0 m}$

   La SP est $x_P=x_{éq}=l_0$. La SGH est $x_H(t)=(At+B)e^{-\omega_0 t}$ car la racine double est $-\dfrac{K}{2}=-\omega_0$.

$x(0)=B+l_0=l_0$: $B=0$ donc $x(t)=A\,t\,e^{-\omega_0 t}+l_0$ et $\dot{x}(t)=A\,e^{-\omega_0 t}-A\,\omega_0\,t\,e^{-\omega_0 t}$
donc $A=-v_0$ et $x(t)=l_0-v_0\,t\,e^{-\omega_0 t}$

4. x min donc $\dot{x}(t)=A\,e^{-\omega_0 t}-A\,\omega_0\,t\,e^{-\omega_0 t}=0$: $t_{\mathrm{MIN}}=\dfrac{1}{\omega_0}$ et en remplaçant :

   $x_{\mathrm{MIN}}=l_0-\dfrac{v_0}{\omega_0\,e}$ car $e^{-1}=\dfrac{1}{e}$. Allure : retour vers $x_{éq}=l_0$ qui est aussi la valeur initiale, sans oscillations ; tangente à l'origine négative $(-v_0)$.

5. On remplace $v(t)=\dot{x}(t)=v_0\,e^{-\omega_0 t}(\omega_0\,t-1)$ donc
   $\dot{v}(t)=-\omega_0\,v_0\,e^{-\omega_0 t}(\omega_0\,t-1)+v_0\,\omega_0\,e^{-\omega_0 t}=v_0\,\omega_0\,e^{-\omega_0 t}(2-\omega_0\,t)$: *v* est donc croissante jusqu'à $t_{\mathrm{MAX}}=\dfrac{2}{\omega_0}$ et décroissante ensuite, pour tendre vers 0.

6. C'est bien à $t_{\mathrm{MAX}}=\dfrac{2}{\omega_0}$: dès que la vitesse du patin décroît, le contact est perdu, car le patin ne peut que pousser le palet et ne le retient pas ; le palet continuera son mouvement de façon uniforme.

   La vitesse vaut à ce moment : $v(t_{\mathrm{MAX}})=v_0\,e^{-2}(2-1)=v_0\,e^{-2}=\dfrac{v_0}{e^2}$

7. Avant le choc (pas de contact du palet avec le dispositif) : $E_m=E_c=\dfrac{1}{2}m\,v_0^2$

8. Après le choc (plus de contact) : $E'_m=E'_c=\dfrac{1}{2}m\,v_0^2\,e^{-4}$. On peut définir le coefficient de restitution du choc comme le rapport des énergies mécaniques : $r=e^{-4}=1{,}83\,\%$, donc $98{,}17\,\%$ de l'énergie mécanique a disparu et a été transformée en énergie thermique par les frottements de l'amortisseur.

   Ce dispositif est donc très efficace en tant que système de freinage.

Astronaute en mission

Sur le système {astronaute + fauteuil} de masse m_T , le BDF contient la force de rappel élastique $\vec{F}=-k(L-L_0)\vec{u}_{R\to M}$ et le poids $\vec{P}=m_T\vec{g}$ où $\vec{g}$ est le champ de pesanteur local.

L'énoncé ne parle pas d'oscillations amorties : les frottements sont donc négligés.

En supposant le référentiel de la station galiléen, on a $m_T\vec{a}=\vec{F}+\vec{P}$

En projetant sur un axe *z* dans le sens opposé à $\vec{g}$ (verticale ascendante locale) dont l'origine est le point d'attache du ressort, on obtient alors (faire un schéma) $L=z$ et $\vec{u}_{R\to M}=+\vec{e}_z$ (MÉTHODO ressorts !!), ce qui conduit à l'ED : $m_T\ddot{z}=-k(z-L_0)-m_T g$ donc $m_T\ddot{x}+kx=kL_0-m_T g$.

(On peut vérifier qu'ici $z_{\text{éq}}=L_{\text{éq}}=L_0-\dfrac{m_T g}{k}<L_0$, bonne méthodo, mais hors sujet.)

On obtient surtout la pulsation propre des oscillations $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m_T}}$, expression valable quelle que soit la valeur de g...

Donc : sans l'astronaute $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$, et avec $\omega_1^2=\dfrac{k}{m+M}$. On fait une division inspirée des deux équations pour obtenir $1+\dfrac{M}{m}=\left(\dfrac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2=\left(\dfrac{T_1}{T_0}\right)^2$ puisque pulsation et période sont inversement proportionnels.

On en tire $M=m\left[\left(\dfrac{T_1}{T_0}\right)^2-1\right]=82{,}6\,\text{kg}$: s'il est en caleçon, il doit limiter sa consommation des petits plats du chef étoilé Thierry Marx...

Réponse harmonique stabilisée

1. Définition A fixe, pas de frottements

BDF : $\vec{P}$, $\vec{T}$, $\vec{F}_1=-k(L_1-l_0)\vec{u}_x$, $\vec{F}_2=-k(L_2-l_0)(-\vec{u}_x)$

RFDx : $m\ddot{x}=-T\sin\theta-k(l+x-l_0)+k(l-x-l_0)$

RFDz : $0=+T\cos\theta-mg$

Petits angles : $\cos\theta\approx 1$

On a $x=l\sin\theta$: $m\ddot{x}+\left(2k+m\dfrac{g}{l}\right)x=0$, donc $\omega_0=\sqrt{2\dfrac{k}{m}+\dfrac{g}{l}}$

2. Seule différence : $L_1=l+x-y$: $m\ddot{x}+\left(2k+m\dfrac{g}{l}\right)x=ky$ donc $\ddot{x}+\omega_0^2 x=\Omega^2 Y_m\cos\omega t$

En régime établi, même pulsation pour x et y : $x(t)=X_m\cos(\omega t+\varphi)$, et on passe dans C

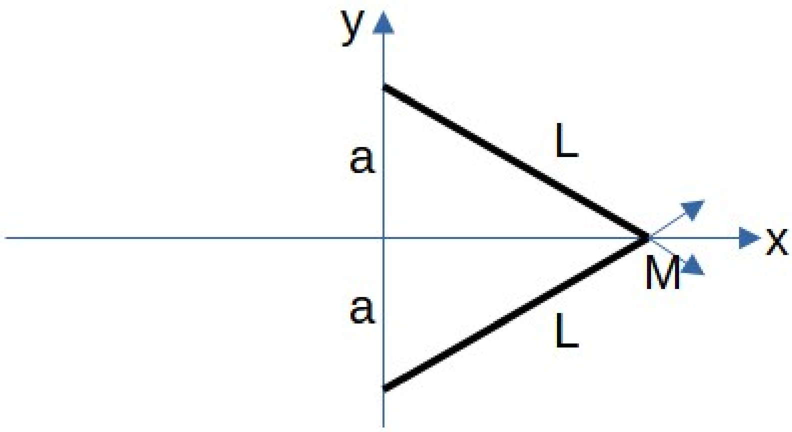
$x(t)=\underline{X_m}e^{j\omega t}$, $y(t)=Y_m e^{j\omega t}$: $\underline{X_m}=Y_m\dfrac{\Omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}$ donc $X_m=Y_m\dfrac{\Omega^2}{|\omega_0^2-\omega^2|}$ et $\varphi=0$ pour $\omega<\omega_0$, $\varphi=\pi$ pour $\omega>\omega_0$.

3. Terme d'amortissement : passe-bas résonnant.

4. Il faut redémontrer que $X_{\text{m,max}}=X_m\dfrac{Q}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}$: avec $X_{\text{m,max}}=1{,}1\,X_m$, on trouve $Q=0{,}9$.

Deux ressorts

a)



b) Réf : Terre, galiléenne

Système : {M;m}

Contrainte : mvt selon x => accélération selon x (le poids et réaction se compensent alors)

Bdf :

Poids $\vec{P}$, réaction normale $\vec{R}_N$ (pas de frottements), forces de rappel élastiques $\vec{F}_1=-k(L-L_0)\vec{u}_1$ et $\vec{F}_2=-k(L-L_0)\vec{u}_2$ avec $L=\sqrt{a^2+x^2}$

RFD sur x : $m a_x=F_{1x}+F_{2x}$, avec $\dfrac{u_{1x}}{x}=\dfrac{1}{L}$ (Thalès par exemple, ou trigo avec le cosinus de l'angle)

D'où : $m a_x=-2k(L-L_0)\dfrac{x}{L}$ donc l'ED : $m\ddot{x}+2kx\left(1-\dfrac{L_0}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)=0$

c) On raye les dérivées partielles pour trouver la ou les solutions constantes :

- $x_0=0$ est toujours une solution
- les autres vérifient $\sqrt{a^2+x^2}=L_0$ soit $x^2=L_0^2-a^2$ qui n'existent que si $a<L_0$ et sont alors $x_1=+\sqrt{L_0^2-a^2}$ et $x_2=-\sqrt{L_0^2-a^2}$, symétrique.

Suspension de voiture

1. $z = L + R \quad \vec{u}_{R\text{ssort} \to \text{Sys}} = +\vec{u}_z$

2. Réf : Terre, galiléen ; Sys : Châssis ; Contrainte : immobilité ; BDF : $\vec{P}$, rappel élastique $\vec{F} = -k(L - L_0)\vec{u}_{R \to M}$; RDF : $\vec{0} = \vec{P} + \vec{F}$;

sur (Oz) : $0 = -mg - k(L - L_0) \iff L_{EQ} = L_0 - \frac{mg}{k}$, bien $< L_0$: normal car ressort comprimé. $z_{EQ} = L_{EQ} + R$.

3. a) Même étude avec frottements en plus $\vec{f} = -\lambda\vec{v} = -\lambda \dot{z}\vec{u}_z$ donc :

$$m\ddot{z} = -mg - k(L - L_0) - \lambda\dot{z}$$

$\hookrightarrow$ inconnue donc pas une équadiff, mais Q1 :

$$\ddot{z} = -g - \frac{k}{m}(z - R - L_0) - \frac{\lambda}{m}\dot{z} \iff \ddot{z} + \frac{\lambda}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = -g + \frac{k}{m}(L_0 + R)$$

$$\iff \ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{EQ}$$

$\hookrightarrow$ on reconnait $z_{EQ} \times \frac{k}{m}$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m}$

$$\iff Q = \frac{m}{\lambda}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{km}$$

3. b) On est alors en régime apériodique critique $\iff \Delta_{E.CAR} = 0$

(E.CAR) : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \quad \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 0 \iff Q = \frac{1}{2}$

donc $\lambda = 2\sqrt{km}$

3. c) Racine double $r_0 = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$: solution générale :

$$z(t) = (At + B)\exp(-\omega_0 t) + \underbrace{z_{EQ}}_{SP}$$

CI : $z(0) = z_{EQ} - h$: $B = -h$

$\dot{z}(0) = 0$ avec $\dot{z}(t) = A\exp(-\omega_0 t) + (At + B)(-\omega_0)\exp(-\omega_0 t)$

donc $0 = A - B\omega_0$: $A = B\omega_0 = -h\omega_0$

donc $z(t) = z_{EQ} - h(1 + \omega_0 t)\exp(-\omega_0 t)$

4. m a augmenté donc $Q = \frac{1}{\lambda}\sqrt{km}$ aussi $\to$ régime pseudopériodique : oscillations incomfortables.

$\Delta = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right) < 0$! $\Delta = \left(j 2\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\right)^2$

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\, 2\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\right) = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega \quad \text{avec } \omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Solution générale $z(t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) + z_{EQ}$

CI : $z(0) = z_{EQ} - h$; $A = -h$

$$\dot z(t) = (-A\omega \sin\omega t + B\omega\cos\omega t)\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) + (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\left(-\frac{\omega_0}{2Q}\right)\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$$

avec $\dot z(0)=0 \Leftrightarrow 0 = B\omega - A\frac{\omega_0}{2Q}$

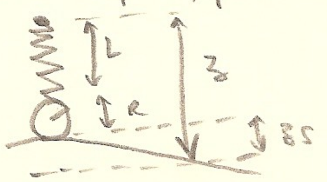
soit $B = -\frac{h}{2Q}\frac{\omega_0}{\omega} = -h\frac{1}{2Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} = -\frac{h}{\sqrt{4Q^2-1}}$

Finalement : $z(t) = z_{EQ} - h\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[\cos\omega t + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin\omega t\right]$

5. a) On a simplement $x = vt$ (mvt uniforme selon x).

b) Énoncé $\vec f = -\lambda \vec v_{Chassis/Roues}$; or $\vec v_{Ch/R} = \vec v_{Ch/Terre} - \vec v_{R/Terre}$.

On a de plus, pour la longueur L du ressort



$z = L + R + z_S$

c) L'équadiff est

$$m\ddot z = -mg - k(\underbrace{L}_{z-R-z_S} - L_0) - \lambda(\dot z - \dot z_S)$$

soit $\ddot z + \frac{\lambda}{m}\dot z + \frac{k}{m}z = \underbrace{-g + \frac{k}{m}(L_0+R)}_{k/m\; z_{EQ}} + \frac{k}{m}z_S + \frac{\lambda}{m}\dot z_S$

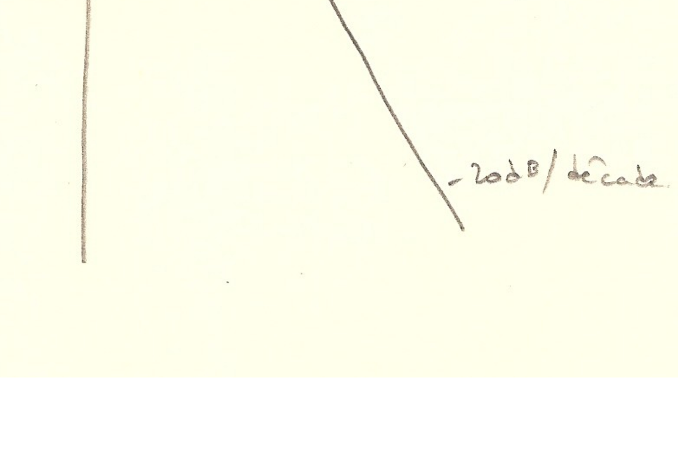
donc

d) $\ddot u + \frac{\omega_0}{Q}\dot u + \omega_0^2 u = \frac{\omega_0}{Q}\dot z_S + \omega_0^2 z_S$ car $\frac{k}{m}(z - z_{EQ}) = \omega_0^2 u$

e) $\underline{H} = \dfrac{j\frac{\omega_0}{Q}\omega + \omega_0^2}{-\omega^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega + \omega_0^2}$

	$\underline{H}$	φ	G	G_{dB}
TBF	1	0	1	0
THF	$-j\frac{\omega_0}{Q\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\omega_0}{Q\omega}$	$20\log\frac{\omega_0}{Q} - 20\log\omega$

Filtre passe bas d'ordre 2, mais avec une pente THF de -20 dB/décade seulement.



f) → Pour $\omega \le \frac{\omega_0}{2Q}$ soit $\frac{2\pi}{\Lambda}v \le \frac{\omega_0}{2Q}$ $\Leftrightarrow v \le \frac{\omega_0\Lambda}{4\pi Q}$, l'oscillation du châssis suit celle du sol, ce qui est assez inconfortable si la vitesse est élevée.

→ Pour une vitesse bien plus élevée, les oscillations sont filtrées et le châssis ne bouge presque plus.

Équation proies – prédateurs (de Volterra-Lotka)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(\delta x - \gamma) \end{cases}$$ où $(\alpha, \beta, \delta, \gamma)$ sont 4 constantes positives.

a) Première affirmation : $\dfrac{dy}{dt} = -\gamma y$, de solution générale $y(t) = Y_0 e^{-\gamma t}$: décroissance exponentielle.

Deuxième affirmation : $\dfrac{dx}{dt} = \alpha x$, de solution générale $x(t) = X_0 e^{\alpha t}$: croissance exponentielle.

Troisième affirmation : $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{\text{préd}} = -\beta(y x)$ (variation due aux prédateurs seuls).

Quatrième affirmation : idem 3ème pour les prédateurs.

b) Il faut se débarrasser de y : on ne peut l'exprimer qu'avec l'équation des proies : $y = \dfrac{\alpha}{\beta} - \dfrac{1}{\beta x}\dfrac{dx}{dt}$.

Dans l'équation des prédateurs, on le remplace : $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{\beta x^2}\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{1}{\beta x}\dfrac{d^2 x}{dt^2}$ donc

$$\frac{1}{\beta x^2}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{\beta x}\frac{d^2 x}{dt^2} = \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta x}\frac{dx}{dt}\right)(\delta x - \gamma) \quad .$$

On peut essayer de l'arranger un peu : $\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{d^2 x}{dt^2} = \left(\alpha x^2 - x\dfrac{dx}{dt}\right)(\delta x - \gamma)$ soit

$$x\frac{d^2 x}{dt^2} - [1 + x(\delta x - \gamma)]\frac{dx}{dt} + \alpha x^2(\delta x - \gamma) = 0$$

c) Dérivées temporelles nulles : $\begin{cases} 0 = x(\alpha - \beta y) \\ 0 = y(\delta x - \gamma) \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_{\text{éq}} = \dfrac{\gamma}{\delta} \\ y_{\text{éq}} = \dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases}$