

TD 15 – ÉNERGIE

1. En vacances

Une voiture tracte un caravane de masse $m = 800 \text{ kg}$ sur une route rectiligne et horizontale.

L'ensemble se déplace à une vitesse $v = 72,0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. L'intensité de pesanteur vaut $g = 10 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$

La force de frottement s'exerçant sur la caravane, supposée constante, a pour valeur $f = 200 \text{ N}$.

1- Calculer la valeur de la force de traction F exercée par la voiture sur la caravane.

2- Calculer la puissance P_1 développée par la force de traction.

La voiture et la caravane se déplacent maintenant sur une pente formant un angle $\alpha = 20^\circ$ avec l'horizontale. On gardera la même valeur pour la force de frottement f .

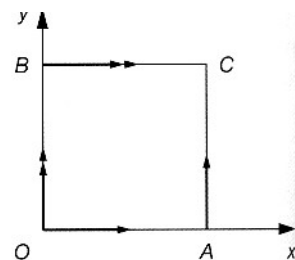
3- Quelle doit être la valeur de la nouvelle puissance P_2 afin que le conducteur garde

La même vitesse v ?

2. Travail d'une force étrange

Les points O , $A(L; 0)$, $B(0; L)$ et C sont les quatre sommets d'un carré.

Il règne dans le plan un champ de force d'équation $\vec{f} = k(y\vec{u}_x - x\vec{u}_y)$, (k cte), où x et y sont les coordonnées cartésiennes du point M où s'applique $\vec{f}$.



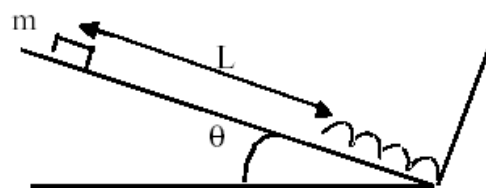
- a) Évaluer les travaux W_1 , W_2 et W_3 de $\vec{f}$ le long des trajets respectifs $O \rightarrow A \rightarrow C$, $O \rightarrow B \rightarrow C$ et $O \rightarrow C$ direct (diagonale du carré).

On exprimera $d\vec{OM}$ et $\vec{f}$ sur chacun des segments en fonction des différentielles dx et dy des coordonnées cartésiennes, en simplifiant x et y quand elles ont des valeurs évidentes, puis on calculera à chaque fois l'intégrale correspondant au travail.

- b) Conclure sur la force $\vec{f}$ et sur l'énergie potentielle associée à $\vec{f}$.

3. Rebond

On abandonne sans vitesse initiale un bloc de masse m à partir du sommet d'un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale. Le bloc glisse sans frottement et vient comprimer un ressort idéal de constante de raideur k en bas du plan incliné. Au point le plus bas atteint par m , le ressort est comprimé d'une longueur d avant qu'il ne se détende à nouveau.



1. Calculer k en fonction de g , m , θ , L (voir la figure) et d .
2. Jusqu'à quelle hauteur le bloc remonte-t-il ?

4. Carabine à ressort

Une carabine-jouet à ressort est modélisée de la manière suivante : un ressort de raideur k est placé dans un tube cylindrique (en plastique) de longueur ℓ_0 égale à la longueur à vide du ressort. On dépose au bout du ressort une balle en plastique de masse m et on comprime le ressort d'une longueur $\Delta\ell$ à l'intérieur du tube. Le tube étant incliné de 60° par rapport à l'horizontale, on libère le ressort qui propulse instantanément la balle. On néglige le frottement de la balle dans le tube et la résistance de l'air.

1 ■ À quelle vitesse v_0 la balle sort-elle du canon de la carabine ?

2 ■ Quelle hauteur h (par rapport à la sortie de la carabine) la balle atteint-elle dans ces conditions ?

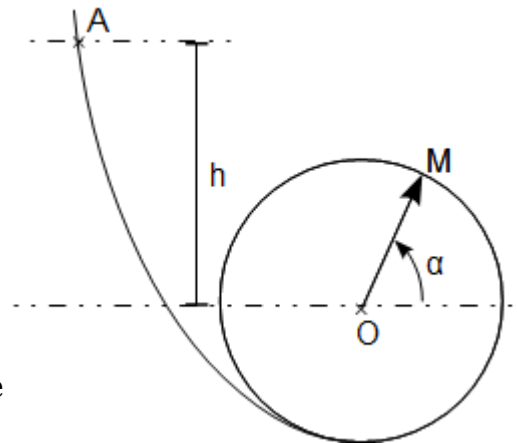
Avec quelle vitesse horizontale v_H ?

A.N. : Calculer v_0 , h et v_H .

Données : $m = 20 \text{ g}$, $k = 400 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\Delta\ell = 10 \text{ cm}$.

5. Gouttière

Un point matériel M , de masse m , glisse sans frottement dans une gouttière, se terminant par une boucle circulaire de rayon R . Le point matériel est lâché, sans vitesse initiale, depuis un point A , situé à une altitude h au-dessus du centre O du cercle. On repère sa position sur le cercle par l'angle α défini sur la figure ci-dessous. Le champ de pesanteur, supposé uniforme, est noté $\vec{g}$ et on prend l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur à l'altitude de O .



- Que peut-on dire de l'énergie mécanique du mobile au cours de son mouvement ?
- Déterminer l'expression de la norme de la vitesse de M sur le cercle en fonction de g , h , R et α .
- Exprimer la force de réaction $\vec{N}$ exercée par la gouttière sur M lorsqu'il se trouve sur la portion circulaire, en fonction de g , h , R , m et α .
- En déduire la condition sur h et R seulement pour que M puisse faire un tour complet.

6. Descente sportive

La piste de descente olympique La Face de Bellegarde, à Val d'Isère, est longue de 3000 m et présente un dénivelé de 900 m.

Un skieur de masse $m = 75$ kg descend la piste.

1. En prenant pour origine de l'énergie potentielle la position du skieur à l'arrivée, calculer l'énergie potentielle du skieur au sommet de la piste.
2. Quelle est la valeur de l'énergie mécanique du skieur au départ ?
3. En supposant les frottements négligeables, quelle serait la vitesse du skieur en bas de la piste ?
4. En réalité, la vitesse maximale enregistrée à l'arrivée est de 140 km h^{-1} .

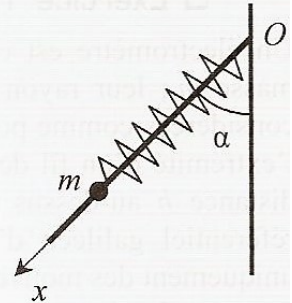
Calculer :

- a. l'énergie cinétique du skieur à l'arrivée ;
- b. la variation de l'énergie cinétique du skieur entre le départ et l'arrivée ;
- a. le travail des forces de frottements.

7.

Ressort sur tige inclinée

Considérons une masse m accrochée à un ressort (k, ℓ_0) et pouvant glisser sans frottement sur une tige inclinée d'un angle α par rapport à la verticale. On définit un axe (Ox) selon la direction de la tige, avec l'origine O est prise à l'autre extrémité du ressort.



1. Énergie et équilibre

- a) Déterminer l'énergie potentielle totale $E_p(x)$ de la masse m .
- b) En déduire la position d'équilibre stable x_{eq} .
- c) Exprimer l'énergie potentielle en fonction de $u = x - x_{\text{eq}}$.

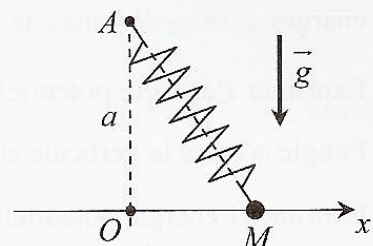
2. Oscillations

- a) Établir l'équation différentielle du mouvement de la masse.
- b) En déduire la période des petites oscillations.

8.

Oscillation le long d'une tige

Un petit anneau, assimilé à un point matériel M de masse m , est astreint à se déplacer sans frottement le long d'une tige rectiligne horizontale, choisie comme axe (Ox) . Il est relié à un ressort (longueur à vide ℓ_0 , raideur k) dont l'autre extrémité est fixée en A . La distance de A à la tige est $AO = a$.



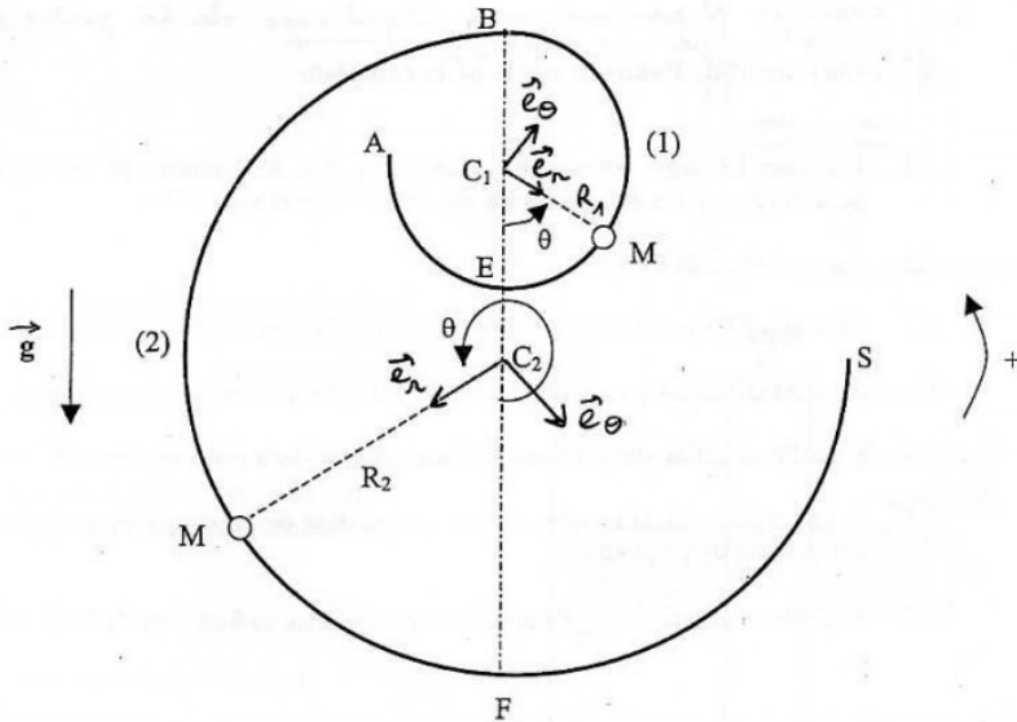
1. Exprimer l'énergie potentielle totale $E_p(x)$. En déduire que, dans le cas où $a > \ell_0$, la seule position d'équilibre est O et qu'elle est stable.
2. On étudie alors les oscillations autour de O . Écrire l'équation différentielle du mouvement par dérivation de l'énergie mécanique. En ne gardant que les termes d'ordre 1 en x (c'est-à-dire en négligeant les termes en $x^2, x^3 \dots$), en déduire la période des petites oscillations.

9. Mouvement d'un anneau sur une piste circulaire

On considère le dispositif de la figure ci-dessous, où un anneau assimilable à un point matériel M de masse m se déplace solidairement à une piste formée de deux parties circulaires (1) et (2) de rayons respectifs R_1 et $R_2 > R_1$, de centres C_1 et C_2 , dans un plan vertical.

On repère la position de l'anneau par l'angle θ pris à partir de C_1 pour son mouvement sur la partie (1), et à partir de C_2 pour son mouvement sur la partie (2).

Sur la partie (1), θ varie entre $-\pi/2$ et π . Sur la partie (2), θ varie entre π et $5\pi/2$.



On note g la constante de gravitation terrestre.

Dans tout le problème, on suppose que le mouvement de l'anneau s'effectue sans frottements.

Dans un premier temps, le mouvement de l'anneau a lieu sur la partie (1) du dispositif. À l'instant $t=0$, l'anneau se trouve au point E ($\theta=0$), avec une vitesse angulaire initiale positive $(d\theta/dt)_0$.

Remarque : on pourra utiliser la notation « point » pour la dérivée temporelle.

A/ Mouvement de l'anneau sur la partie (1)

On se limite ici à la partie (1) de la piste.

1. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur, E_p , de l'anneau M en fixant $E_p=0$ au point B ($\theta=\pi$).
2. En déduire le carré de la vitesse angulaire $(d\theta/dt)^2$ à une position quelconque en fonction des données du problème R_1 , $(d\theta/dt)_0$, g et θ .
3. En déduire l'équation différentielle dont $\theta(t)$ est solution.

On admet pour les deux questions qui suivent (4 et 5, mais pas 6) l'hypothèse que θ est suffisamment petit pour assimiler $\sin \theta$ à θ

4. Déterminer l'expression complètement déterminée de $\theta(t)$. Déterminer la valeur maximale de $\theta(t)$: $\theta_{\max}$.

5. Application numérique : $R_1 = 1\text{ m}$, $g = 10\text{ m/s}^2$ et $(d\theta/dt)_0 = 1\text{ rad/s}$.
Calculer la pulsation, la période et l'amplitude maximale (θ_{max}) du mouvement.
L'approximation $\sin \theta = \theta$ est-elle valable ?
6. On note $\bar{N} = N_r$, coordonnée radiale (projection sur $\vec{e}_r$) de la réaction $\vec{N}$ de la piste sur l'anneau.
- Pourquoi est-ce la seule coordonnée de $\vec{N}$?
 - Exprimer $\bar{N}$ pour une position quelconque de l'anneau sur la partie (1) de la piste, en fonction de m , R_1 , $(d\theta/dt)_0$, g et θ .
 - Étant donné le système considéré (anneau sur piste filiforme), le signe de $\bar{N}$ est-il imposé ou peut-elle éventuellement changer de signe ?

B/ Mouvement de l'anneau sur la piste complète (1)+(2)

- Avec le même choix du zéro qu'à la question A/1., exprimer l'énergie potentielle de pesanteur, E_p , de l'anneau M sur la partie (2).

Tracer l'allure de $E_p(\theta)$ dans tout le domaine $[-\pi/2 ; 5\pi/2]$.

- Déterminer les positions d'équilibre de l'anneau en précisant leur stabilité.

L'anneau étant initialement en $A(\theta = -\pi/2)$, il est lancé à une vitesse v_0 sur la piste.

- À quelle condition sur la vitesse v_0 l'anneau peut-il atteindre le point F ?
- Cette condition étant tout juste remplie, donner l'expression de sa vitesse v_F au point $F(\theta = 2\pi)$ en fonction des données du problème.
- À quelle condition sur v_0 l'anneau sort-il de la piste en $S(\theta = 5\pi/2)$?

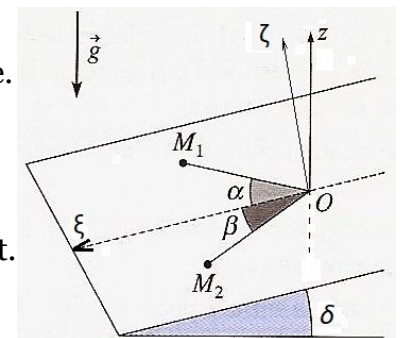
10. Plan incliné (décomposition 3D)

On considère un plan incliné d'un angle δ par rapport à l'horizontale.

L'axe vertical est noté z , alors que l'axe perpendiculaire au plan incliné est noté ζ .

La ligne de plus grande pente du plan incliné est notée ξ : il s'agit de la demi-droite de référence des coordonnées polaires du mouvement.

En effet, le point M est accroché à un fil toujours tendu, de longueur L fixé en O .



Le point M est lâché de la position initiale $\theta = -\alpha$, sans vitesse, et atteint la position $\theta = +\beta$ avant de repartir en arrière.

On a $\beta < \alpha$, car il existe des frottements solides de coefficient dynamique f . On néglige tout frottement fluide.

- Écrire la RFD, représenter la base cylindropolaire utile pour l'étude du mouvement, en un point M **quelconque** de la trajectoire, et déterminer les coordonnées du vecteur accélération dans cette base, en fonction de L et des dérivées temporelles de θ .
- Déterminer les coordonnées des forces dans cette base, en fonction de leur norme.
Dans le cas du poids, décomposer $\vec{P}$ dans la base $(\vec{u}_\xi; \vec{u}_\zeta)$ d'abord, puis décomposer à nouveau si besoin dans la base polaire.
- En déduire une expression reliant θ , ses dérivées, et des constantes.
- Intégrer cette expression entre l'état initial et l'état final, pour obtenir l'expression du coefficient de frottement en fonction de seulement δ , α et β .