

Éléments cinématiques en cylindrique

a) On sait (on peut le redémontrer) que $\vec{v}_R : \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r \dot{\theta} \\ \dot{\chi} \end{pmatrix}_{\text{cyl}}$ donc $\vec{v}_R : \begin{pmatrix} 2 a_0 t \\ \omega_0 (a_0 t^2 + r_0) \\ -v_0 \end{pmatrix}_{\text{cyl}}$.

Pour l'accélération $\vec{a}_R : \begin{pmatrix} \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \\ r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} \\ \ddot{\chi} \end{pmatrix}_{\text{cyl}}$ soit $\vec{a}_R : \begin{pmatrix} 2 a_0 - \omega_0^2 (a_0 t^2 + r_0) \\ 4 a_0 \omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{cyl}}$

b) On a $v_R = \sqrt{(2 a_0 t)^2 + \omega_0^2 (a_0 t^2 + r_0)^2 + v_0^2} = 5,1 \text{ m/s}$ à $t = 1 \text{ s}$

c) On a $a_R(0) = |2 a_0 - \omega_0^2 r_0| = 7,0 \text{ m/s}^2$.

Château d'Amboise

a) Le pas correspond à l'augmentation d'altitude après un tour : $\Delta \theta = 2 \pi \Leftrightarrow t = \frac{2 \pi}{\omega}$ donc

$$\Delta z = h = \frac{2 \pi a}{\omega}$$

b) Il faut bien sûr utiliser les coordonnées cylindriques : $\vec{v}_R : \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r \dot{\theta} \\ \dot{\chi} \end{pmatrix}_{\text{cyl}}$ donc $\vec{v}_R : \begin{pmatrix} 0 \\ r \omega \\ a \end{pmatrix}_{\text{cyl}}$.

On a également $\vec{a}_R : \begin{pmatrix} \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \\ r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} \\ \ddot{\chi} \end{pmatrix}_{\text{cyl}}$ donc $\vec{a}_R : \begin{pmatrix} -r \omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{cyl}}$: l'accélération est radiale (attention en cylindriques : dirigée vers l'axe, pas vers l'origine des coordonnées).

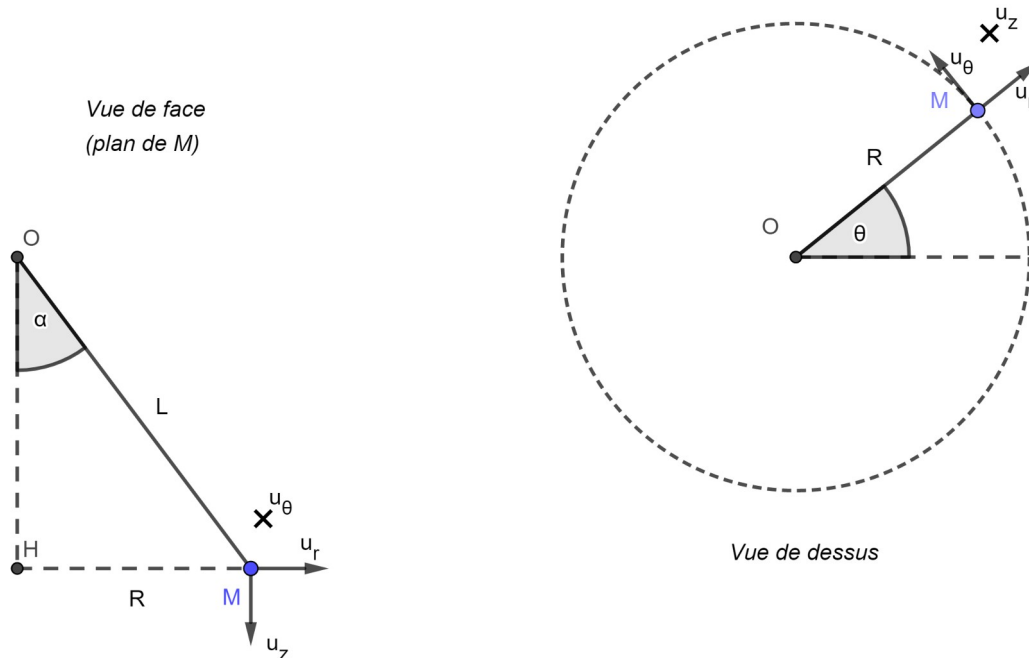
c) On en déduit $v = \sqrt{r^2 \omega^2 + a^2}$ qu'on peut exprimer en fonction de r et h :

$$v = \omega \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2 \pi} \right)^2}$$

d) Lancelot est un chevalier d'Arthur, personnage des romans de la Table Ronde écrits au XIIIème siècle, c'est donc bien antérieur à la construction de l'escalier d'Amboise sous Charles VIII, à la fin du XVème siècle.

Pendule conique

Pendule conique



Réf : Terrestre, galiléen

Système : M de masse m

Contrainte : MC => coordonnées cylindropolaires (les forces ne sont pas dans le plan).

On a pris l'axe z vers le bas : c'est correct tant qu'on n'utilise pas l'énergie potentielle de pesanteur, ni le produit vectoriel (qui impose que la base soit directe).

Remarque : une approche énergétique ne donnerait rien ici, car toutes les formes d'énergie sont constantes...

BdF : Poids $\vec{P}$, tension du fil $\vec{T}$, clairement pas de frottements qui ramèneraient M à la verticale...

RFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$: T est inconnue, il faut projeter.

Projections :

* cinématique pour $\vec{a}$: on introduit $R = L \sin a$, rayon de la trajectoire, et $z = L \cos a = OH$

$\vec{OM} = R\vec{u}_r + z\vec{u}_z$ avec R et z constants, donc $\vec{v} = R\omega\vec{u}_\theta$ et $\vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_r + R\dot{\omega}\vec{u}_\theta$

* c'est trivial pour le poids

* pour la tension

En ramenant l'angle a à l'origine M, on voit que (c'est une solution possible) l'angle entre $\vec{u}_z$ et $\vec{T}$ est $\pi + a$: $T_z = T \cos(\pi + a) = -T \cos a$

Il faut retrancher $\pi/2$ pour obtenir : $T_r = T \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -T \sin a$

C'est cohérent avec le sens de $\vec{T}$: vers l'arrière des deux vecteurs unitaires.

D'où le système :

$$\begin{cases} -m R \omega^2 = -T \sin a \\ m R \dot{\omega} = 0 \\ 0 = P - T \cos a \end{cases} : \dot{\omega} = 0 \text{ donc } \omega \text{ est constante et (attention, c'est en fonction de } L \text{ qu'il faut}$$

obtenir la relation) : $m L \sin a \omega^2 = \frac{m g}{\cos a} \sin a$.

Donc soit $\sin a = 0$ (pendule vertical), soit $L \omega^2 = \frac{g}{\cos a} : a = \text{Arccos}\left(\frac{g}{L \omega^2}\right)$ (cos est bijectif sur le domaine de a qui est $[0, \pi]$).

On doit trouver le domaine de définition de la fonction avant toute chose : il faut que

$$\frac{g}{L \omega^2} \leq 1 \Leftrightarrow \omega \geq \omega_0, \text{ en introduisant la pulsation propre des petites oscillations du pendule}$$

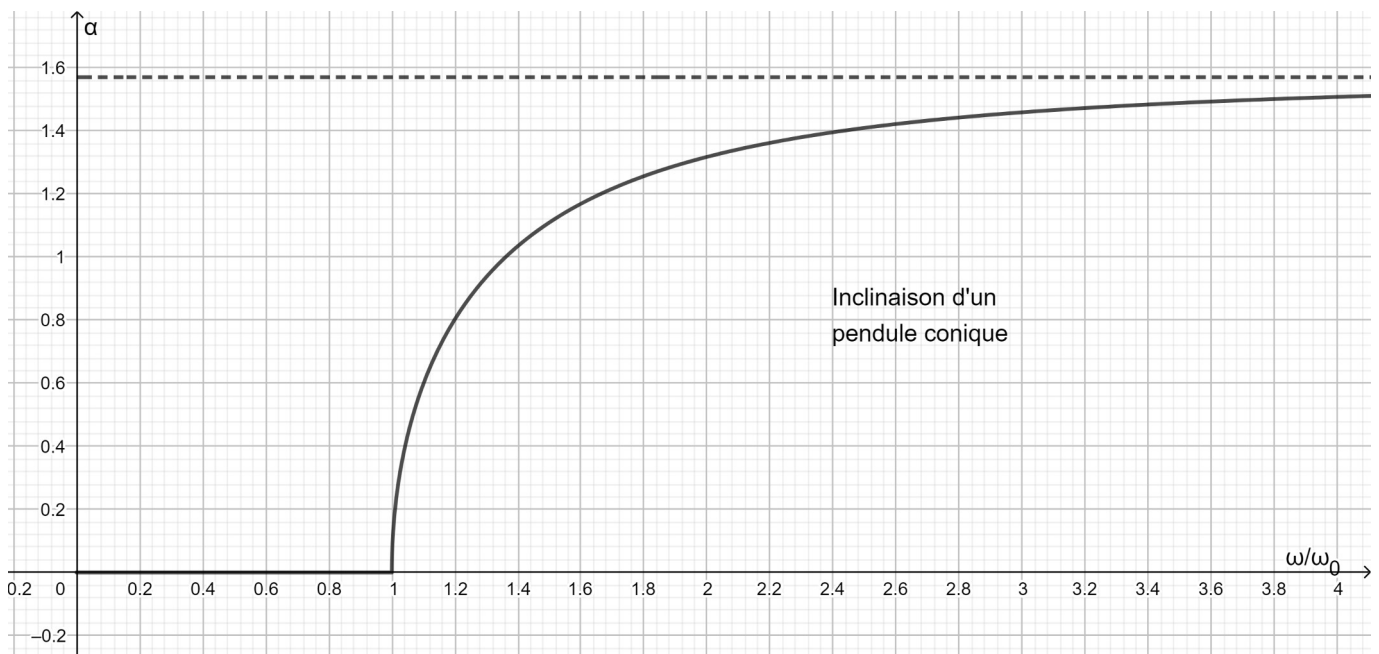
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} .$$

La fonction à étudier se ramène alors à $a = \text{Arccos}\left(\frac{1}{X^2}\right)$, définie à partir de 1, en posant

$$X = \frac{\omega}{\omega_0} .$$

Limites ensuite : en $X \rightarrow 1_+$, $a \rightarrow 0$; en $X \rightarrow +\infty$, $a \rightarrow \text{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}$ par valeur inférieure (ce qui est très logique : le pendule tourne alors très vite, et on sent bien qu'il ne peut pas dépasser l'horizontale).

La dérivée de Arccos tend vers $-\infty$ quand son argument tend vers 1 : la tangente en 1 est donc verticale (le signe opposé vient du fait que $1/X^2$ est une fonction décroissante).

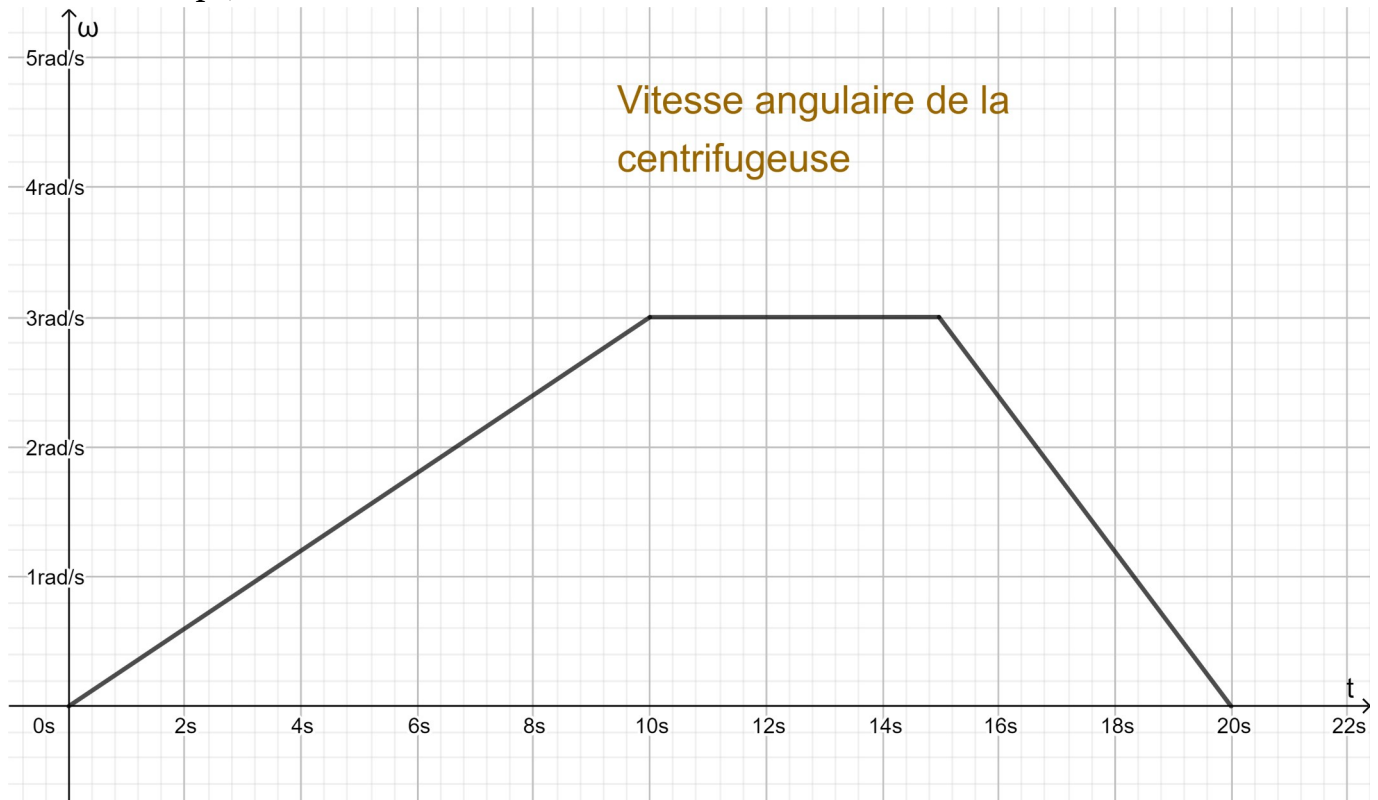


On voit l'inclinaison prendre des valeurs importantes dès que ω dépasse un peu ω_0 ...

Pour $\omega < \omega_0$ qui est bien sûr physiquement possible (rotation lente), la seule solution est donc $\sin a = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Astronaute en entraînement

- a) Solution astucieuse, graphique : on connaît l'évolution de la vitesse angulaire en fonction du temps, donc on la trace.



Comme $\omega = \dot{\theta}$, on a $[\theta(t)]_0^t = \int_0^t \omega(t) dt$ donc $\theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt$, aire sous la courbe.

Soit $\theta = \frac{1}{2} \tau_1 \omega_M + \tau_2 \omega_M + \frac{1}{2} \tau_3 \omega_M$ avec les notations évidentes : $\omega_M = 3,0 \text{ rad/s}$, $\tau_1 = 2 \tau_2 = 2 \tau_3 = 10 \text{ s}$ (expression littérale d'abord, c'est mieux)

Donc $\theta = \frac{\omega_M}{2} (\tau_1 + 2 \tau_2 + \tau_3) = 37,5 \text{ rad}$ dont en tours : $\theta = \frac{37,5 \text{ rad}}{2 \pi \text{ rad/tr}} = 5,97 \text{ trs}$

Solution calculatoire : on intègre en prenant une primitive à chaque étape ; il est alors plus simple de réinitialiser la date à 0 à chaque fois, et de sommer les 3 angles obtenus.

Première phase : MCUA signifie que la valeur de la vitesse augmente régulièrement, donc, puisque le rayon est constant, que l'accélération angulaire est constante ; notons la γ .

$$\ddot{\theta} = \gamma \Rightarrow [\dot{\theta}]_0^t = [\gamma t]_0^t \text{ soit } \omega(t) = \gamma t \text{ avec } \omega(\tau_1) = \omega_M \text{ donc } \gamma = \frac{\omega_M}{\tau_1} = 0,3 \text{ rad/s}^2.$$

En intégrant une seconde fois, on obtient $\theta(t) = \frac{1}{2} \gamma t^2$ donc $\theta(\tau_1) = \frac{1}{2} \gamma \tau_1^2 = \frac{1}{2} \omega_M \tau_1 = 15 \text{ rad}$

La **seconde phase** est triviale ; attention à la CI pour la **troisième phase**.

b) L'accélération radiale est la plus grande quand ω est maximale, et l'accélération tangentielle quand la dérivée de ω est maximale en valeur absolue.

Pas de doute, il y a une date exactement où les deux sont maximales : la sensation sera la pire à $t = 15 \text{ s}$ ($a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$).

Ressort tournant autour de O

Référentiel : terrestre galiléen

Système : point M de masse m

Contrainte : mouvement circulaire de rayon r

BdF : poids $\vec{P}$, réaction normale $\vec{R}_N$, rappel élastique $\vec{F} = -k(L - L_0)\vec{u}_{R \rightarrow M}$

avec ici : $L = r$ et $\vec{u}_{R \rightarrow M} = +\vec{u}_r$ en coordonnées cylindropolaires ; en effet, même si le mouvement est plan, les forces sont en 3 dimensions.

RFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}$ où il faut déterminer l'accélération, car coordonnées non cartésiennes.

$\vec{OM} = r\vec{u}_r$ donc, r étant constant (cercle) : $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ puis $\vec{a} = r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$ où l'on ne suppose pas a priori $\omega = \dot{\theta}$ constante (on peut le prouver).

Projections : sur la base cylindrique $(\vec{u}_r; \vec{u}_\theta; \vec{u}_z)$

$$\begin{cases} -mr\omega^2 = -k(r - L_0) \\ mr\dot{\omega} = 0 \\ 0 = +R_N - P \end{cases} \quad \text{où l'on voit que } \omega \text{ est constante, que la réaction compense le poids (mais}$$

c'est toujours à prouver), et où l'on tire l'équation souhaitée $mr\omega^2 = k(r - L_0)$ soit $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{L_0}{r}}$,

en introduisant la pulsation propre du système masse-ressort $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

On voit d'après l'expression trouvée que le mouvement circulaire (donc uniforme ici) n'est possible que si $r > L_0$ et que la vitesse angulaire du mouvement tend vers ω_0 pour un ressort infiniment étiré.

Course de voitures

(a) On a $L_A = \pi r_A = 283 \text{ m}$ et $L_B = \pi r_B + 2OO' = 266 \text{ m}$: la distance parcourue est plus faible pour la voiture B.

(b) En dérivant $\vec{OM} = r\vec{u}_r$, la vitesse est $\vec{v}_R : \begin{pmatrix} 0 \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix}_{\text{pol}}$: $\vec{v}_R = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $v_R = r\dot{\theta} = \text{cte}$ donc

$$\dot{\theta} = \frac{v}{r} = \text{cte}. \text{ On obtient } \vec{a}_R : \begin{pmatrix} -r\dot{\theta}^2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{pol}} \text{ soit } \vec{a}_R = -\frac{v^2}{r}\vec{e}_r \text{ et donc } \boxed{v = \sqrt{ra}} :$$
$$v_A = \sqrt{90 \text{ m} \times 0,8 \times 9,81 \text{ m/s}^2} \text{ soit } \underline{v_A = 26,6 \text{ m/s}} \text{ et de même } \underline{v_B = 24,3 \text{ m/s}}.$$

(c) On a $\tau_A = \frac{L_A}{v_A}$ car le mouvement est uniforme donc $\tau_A = 10,6 \text{ s}$ et de même $\tau_B = 10,9 \text{ s}$: la durée est donc plus importante pour B que pour A. Il est donc préférable de négocier un virage large.

Mouvement oscillant sur un cercle

(a) La période du sinus est 2π donc $T = \frac{2\pi}{\Omega}$.

(b) L'angle θ varie entre $-\pi$ et $+\pi$, mais à ces positions le mobile fait demi-tour. La vitesse angulaire est $\omega = \dot{\theta} = \pi\Omega \cos\Omega t$: elle n'est pas constante.

(c) On a donc $\sin\Omega t_1 = \frac{1}{2}$ soit pour la première date $\Omega t_1 = \frac{\pi}{6}$ soit $t_1 = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{T}{2\pi} : \boxed{t_1 = \frac{T}{12}}$

(d) On obtient $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix}_{\text{pol}}$ soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi R \Omega \cos \Omega t \end{pmatrix}_{\text{pol}}$

(e) On trouve $\vec{a} = \begin{pmatrix} -r\ddot{\theta} \\ r\dot{\theta}^2 \end{pmatrix}_{\text{pol}}$ avec $\dot{r}=0$, $\ddot{r}=0$ et $\ddot{\theta} = -\pi \Omega^2 \sin \Omega t$ donc

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -\pi^2 R \Omega^2 \cos^2 \Omega t \\ -\pi R \Omega^2 \sin \Omega t \end{pmatrix}_{\text{pol}}$$

(f) On peut écrire $\vec{a} = -\pi R \Omega^2 \begin{pmatrix} \pi \cos^2 \Omega t \\ \sin \Omega t \end{pmatrix}_{\text{pol}}$ donc $a^2 = (\pi R \Omega^2)^2 [\pi^2 \cos^4 \Omega t + \sin^2 \Omega t]$

L'accélération sera maximale lorsque $A = \pi^2 \cos^4 \Omega t + \sin^2 \Omega t$ l'est : posons $U = \cos^2 \Omega t$.

On a alors $A = \pi^2 U^2 + 1 - U$ et $\frac{dA}{dU} = 0 = 2\pi^2 U - 1$ donc pour $U_0 = \frac{1}{2\pi^2}$.

Étudions A : $A(0) = 1$, $A(1) = \pi^2$ et $A(U_0) = 1 - \frac{1}{4\pi^2}$.

U_0 est donc un minimum : A est maximal pour $U = 1$ soit pour $\Omega t = 0 + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
donc pour $t_2 = k \frac{T}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$

Chaussette séchant dans un sèche-linge

1 et 2.

La chaussette est entraînée par le tambour : il faut supposer des frottements solides (sinon, elle reste en bas du tambour).

Réf : terre galiléen ; Système : chaussette ; Contrainte : MCU ;

BDF : Poids $\vec{P}$, Réaction normale $\vec{R}_N$ du tambour vers la chaussette, Réaction tangentielle $\vec{R}_T$

Forces dans le plan : les coordonnées polaires suffisent

RFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$

Projections : $\vec{OM} = R\vec{u}_r$ donc $\vec{v} = R\omega\vec{u}_\theta$ puis $\vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_r$

$\vec{R}_N = \begin{pmatrix} -R_N \\ 0 \end{pmatrix}$ de façon évidente ; on n'est pas certain du signe de la coordonnée de la réaction tangentielle, on note donc $\vec{R}_T = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{R}_T \end{pmatrix}$ (valeur algébrique).

En ramenant le vecteur poids en O ou bien l'angle θ en M, on voit que l'angle entre $\vec{P}$ et $\vec{u}_r$ est $\frac{\pi}{2} + \theta$, donc vaut $\pi + \theta$ avec $\vec{u}_\theta$; donc $\vec{P} = \begin{pmatrix} -P \sin \theta \\ -P \cos \theta \end{pmatrix}$

D'où les équations :
$$\begin{cases} -mR\omega^2 = -R_N - P \sin \theta \\ 0 = \bar{R}_T - P \cos \theta \end{cases}$$

On voit que $\bar{R}_T = P \cos \theta$ est positif (dans la partie droite du tambour) et que $R_N = m(R\omega^2 - g \sin \theta)$

3. C'est une différence : elle s'annule en $\theta = \text{Arcsin}\left(\frac{R\omega^2}{g}\right)$

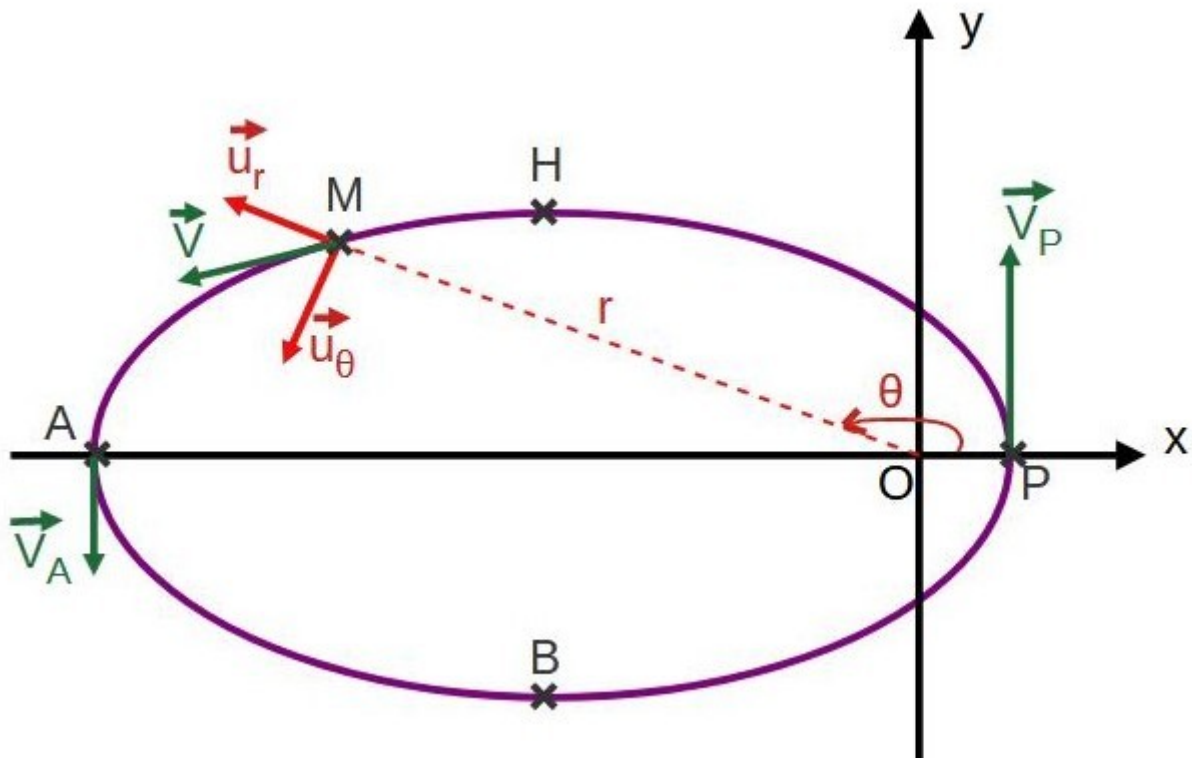
4. Perte de contact : le mouvement devient parabolique avec la vitesse initiale $\vec{v}_0 = R\omega\vec{u}_\theta$, à traduire en base cartésienne si l'on souhaite un résultat explicite.

Trajectoire d'une comète

1. La distance r à O est minimale quand $\cos \theta$ est maximal, donc égal à 1, pour $\theta = 0$, donc au point P : $r_P = \frac{p}{1+e}$

Elle est maximale quand $\cos \theta = -1$ donc $\theta_A = \pi$ et $r_A = \frac{p}{1-e}$

2.



3. Voir cours, l'accélération orthoradiale, qui doit être nulle, est $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$.
Comme le mouvement n'est pas circulaire, cela n'implique pas qu'il est uniforme.
C constante $\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$ donc $2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0$ soit $ra_\theta = 0$, ce qui est bien vérifié.
En P, $\dot{r} = 0$ (distance minimale), donc $v_P = r\dot{\theta}$ purement orthoradiale : $C = r_P v_P$
4. En A aussi, la vitesse est purement orthoradiale, puisque r max implique $\dot{r} = 0$:
 $C = r_A v_A$.
Donc $v_A = \frac{r_P}{r_A} v_P = \frac{1-e}{1+e} v_P$.

Quatre mouches

(a) On voit qu'il y a en permanence le même angle entre $\vec{v}$ et les vecteurs de la base polaire :

$(\vec{u}_\theta, \vec{v}_A) = \frac{\pi}{4}$ et $(\vec{u}_r, \vec{v}_A) = \frac{3\pi}{4}$. On en déduit que $\vec{v}_A \cdot \vec{u}_\theta = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\vec{v}_A \cdot \vec{u}_r = -v_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc

que $\boxed{\vec{v}_A = -v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_r + v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_\theta}$

(b) On a $\vec{v}_A = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ donc $\dot{r} = -v_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$: $r_A(t) = r_A(0) - v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} [t]_0^t$. Comme $r_A(0) = l \frac{\sqrt{2}}{2}$, on

obtient $\boxed{r_A(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} (l - v_0 t)}$.

Les mouches atteignent donc le centre du carré à la date annulant r_A donc pour $\boxed{t_1 = \frac{l}{v_0}}$.

(c) On a également $r \dot{\theta} = v_\theta = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\dot{\theta} = \frac{v_0}{l - v_0 t}$: $\theta = \theta(0) + \int_0^t \dot{\theta}(t) dt$ et $\theta(0) = 0$

Cherchons une primitive : le dénominateur est positif pendant le mouvement, et θ est de la forme $\frac{K}{at+b}$.

Dérivons la primitive vraisemblable à une constante près : $\frac{d}{dt} [\ln(l - v_0 t)] = -\frac{v_0}{l - v_0 t}$: on

en déduit $\theta(t) = -[\ln(l - v_0 t)]_0^t$ soit $\theta(t) = -\ln(l - v_0 t) + \ln l$: $\boxed{\theta(t) = \ln\left(\frac{l}{l - v_0 t}\right)}$.

On remarque que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta = +\infty$: les mouches traversent les axes un nombre infini de fois.

Pour obtenir l'équation polaire, il faut remplacer la date par l'angle dans $r_A(t)$:

$\ln(l - v_0 t) = \ln l - \theta$: $l - v_0 t = l e^{-\theta}$ et donc $\boxed{r(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} l e^{-\theta}}$