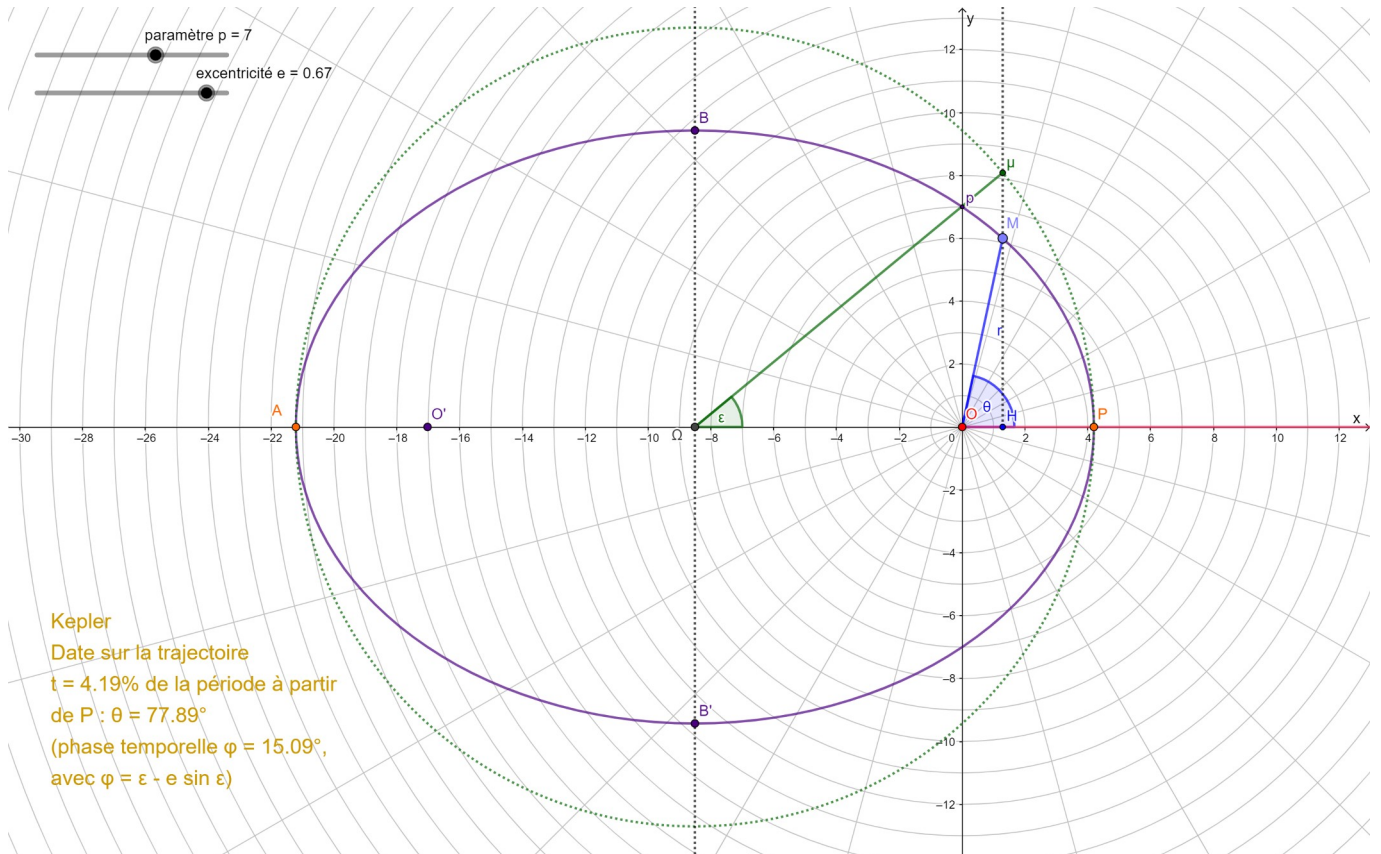


... et équation polaire de la trajectoire.

Le lien entre la nature des trajectoires et la force gravitationnelle est ultérieur : c'est le travail scientifique d'Isaac Newton.



On prend comme origine des angles polaires θ la demi droite $[OP)$ où P est le périastre.

O (où se trouve l'astre central) et O' sont les foyers de l'ellipse, Ω son centre.

On note B et B' les points de l'ellipse tels que $(B\Omega) = (\Omega B') \perp (AP) : \Omega B = \Omega B' = b$, demi petit axe.

L'aire de l'ellipse est $A = \pi a b$.

On note Π le point de l'ellipse tel que $\theta(\Pi) = +\frac{\pi}{2}$ et on appelle la distance $O\Pi = r_\Pi = p$ le **paramètre** de l'ellipse.

L'**excentricité** de l'ellipse e est définie par $\Omega O = \Omega O' = ea$: elle est donc sans unité, de valeurs dans $[0; 1[$ et vaut 0 dans le cas d'un cercle. C'est le rapport de la distance centre-foyer sur le demi grand axe.

1. En déduire que $\begin{cases} r_p = a(1-e) \\ r_A = a(1+e) \end{cases}$.

L'ellipse est définie géométriquement par $OM + O'M = \text{cte}$: somme des distances de M aux foyers constante.

2. En déduire que la constante vaut $2a$, puis que $r_B = a$.

3. En utilisant le point Π , prouver que $p = a(1-e^2)$.

b – Équation polaire

On note H le projeté de M (quelconque) sur le grand axe.

4. Exprimer OH , $O'H$ et HM en fonction de r , $\cos \theta$, $\sin \theta$, a et e .

5. En déduire $r' = O'M$.

6. Avec $r + r' = 2a$, prouver que $r = \frac{p}{1+e \cos \theta}$.

7. Montrer que $\theta_B = \text{Arccos}(-e)$

II – Introduction du cercle circonscrit

La base du raisonnement de Kepler est de se ramener aux propriétés des cercles en introduisant le cercle circonscrit à l'ellipse, donc de centre Ω et de rayon a .

a – Anomalie excentrique ε

On introduit μ , point correspondant à M sur le cercle, donc l'intersection de la demi droite (HM) avec le cercle.

On définit l'**anomalie excentrique** ε par l'angle $\varepsilon = (\vec{\Omega P}, \vec{\Omega \mu})$

8. En explicitant le cosinus de l'angle ε , montrer que $r \cos \theta = a(\cos \varepsilon - e)$

9. Montrer finalement que $\cos \varepsilon = \frac{\cos \theta + e}{1 + e \cos \theta}$

On peut donc déterminer cet angle, connaissant l'angle polaire θ .

En effet, le cosinus est bijectif dans la moitié supérieure de la trajectoire ; pour obtenir une bijection sur la totalité de la trajectoire, il suffit de remarquer que le signe de ε est le même que celui de θ .

10. Inverser cette relation pour obtenir $\cos \theta$ en fonction de e et de $\cos \varepsilon$

b – Anomalie moyenne φ

Il s'agit encore d'un angle (dont le nom est très étrange...), mais qui n'est pas géométrique : c'est la phase temporelle du mouvement à partir du périastre, donc la date sur l'orbite exprimée en

unité d'angle : $\varphi = 2\pi \frac{t}{T}$ (en radians) ou encore $\varphi = 360^\circ \frac{t}{T}$ (angle exprimé en degrés).

Par exemple, si $\varphi = +90^\circ$, c'est qu'il s'est écoulé exactement 1/4 de période depuis le périastre.

c – Loi des aires

Kepler avait établi auparavant sa seconde loi, la loi des aires : c'est le cœur de son raisonnement pour déterminer le lien entre position sur l'orbite et date.

On déduit par proportionnalité de l'aire balayée avec la date, et par définition de l'anomalie moyenne φ , que $\frac{A(OPM)}{A_{\text{ellipse}}} = \frac{\varphi}{2\pi}$ où $A(OPM)$ est l'aire du secteur de l'ellipse balayée par le vecteur position entre P et M .

11. En déduire que $A(OPM) = \frac{ab}{2} \varphi$

d – Relation entre les anomalies

On utilise ici le fait qu'une ellipse est un cercle « écrasé » : dans la direction du grand axe, les longueurs sont inchangées, alors que dans la direction du petit axe, elle sont réduites du facteur $\frac{b}{a}$.

12. En déduire que l'aire du secteur **circulaire** vaut $A(OP\mu) = \frac{a^2}{2} \varphi$

On se ramène alors au secteur circulaire de centre Ω .

13. Montrer que $A(OP\mu) = \pi a^2 \frac{\varepsilon}{2\pi} - \frac{1}{2} \times a e \times a \sin \varepsilon$

14. En déduire que, finalement : $\boxed{\varphi = \varepsilon - e \sin \varepsilon}$

III – Dates sur l'orbite : résumé du calcul

a – Date en fonction de la position

Aucun problème pour effectuer ce calcul :

1. on calcule l'anomalie excentrique en fonction de l'angle polaire avec

$$\varepsilon = \text{sgn}(\theta) \text{Arccos}\left(\frac{\cos\theta + e}{1 + e \cos\theta}\right)$$

2. on en déduit l'anomalie moyenne $\varphi = \varepsilon - e \sin \varepsilon$

3. puis la date en ce point (la période T du mouvement est bien sûr connue d'après la 3ème loi de Kepler) : $t_M \equiv t_P + \frac{\varphi}{2\pi} T$ [T]

b – Position en fonction de la date

Le calcul n'est plus aussi direct : il faut utiliser une méthode numérique, dichotomie typiquement.

En effet :

1. on calcule l'anomalie moyenne : $\varphi = \frac{2\pi}{T}(t_M - t_P)$ qu'on ramène dans le domaine principal.
2. il faut résoudre l'équation transcendante $\varphi = \varepsilon - e \sin \varepsilon$ pour obtenir l'anomalie excentrique ε .
3. On en déduit l'angle polaire θ avec $\theta = \text{sgn}(\varepsilon) \arccos\left(\frac{\cos \varepsilon - e}{1 - e \cos \varepsilon}\right)$ (Q10.)
4. puis finalement la distance r à l'astre avec l'équation polaire de l'ellipse $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$, sachant que $p = a(1 - e^2)$.