

Dans le cours, nous avons étudié les orbites d'un système autour d'un astre central fixe unique.

En astronomie, cette situation est fréquente, mais n'est pas la seule : beaucoup d'étoiles sont dites doubles, car elles orbitent l'une autour de l'autre, en tournant autour de leur **centre de gravité G**.

On considère ici deux corps célestes (étoiles doubles ou planète avec un satellite), de centres notés P_1 et P_2 , et de masses respectives m_1 et m_2 .

La masse totale est notée $m_T = m_1 + m_2$ et le rapport des masses est noté $k = \frac{m_1}{m_2} \geq 1$: on peut supposer que le corps n°1 est le plus massif.

On prendra leur centre de gravité G comme origine du repère polaire : on note $R_1 = GP_1$ (distance), $R_2 = GP_2$ et $D = P_1P_2 = R_1 + R_2$.

Dans tout le problème, la distance D est supposée **constante** : chacun des astres tourne autour de G en décrivant une orbite circulaire (ce n'est pas le cas général en astronomie : on peut obtenir deux ellipses).

Partie A : problème à 2 corps ...

1. Obtenir l'expression de chacune des masses des astres en fonction de m_T et de k .

$$\begin{cases} m_T = m_1 + m_2 \\ m_1 = k m_2 \end{cases} \text{ donc } m_2 = \frac{1}{k+1} m_T \text{ et } m_1 = \frac{k}{k+1} m_T$$

2. Rappeler la définition du centre de gravité (barycentre), et en déduire chaque distance R_1, R_2 en fonction de D et k . Schématiser pour $k=2$.

$m_1 \vec{GP}_1 + m_2 \vec{GP}_2 = \vec{0}$: $m_1 \vec{GP}_1 = -m_2 \vec{GP}_2$ où l'on prend les normes, donc $m_1 R_1 = m_2 R_2$, puis $R_2 = k R_1$ et comme $R_1 + R_2 = D$, le système est le même que le précédent mais où l'on a échangé les indices 1 et 2, donc $R_1 = \frac{1}{k+1} D$ et $R_2 = \frac{k}{k+1} D$.

AN pour $k=2$: $R_1 = \frac{1}{3} D$ et $R_2 = \frac{2}{3} D$ (voir schéma à la fin, avec tout).

3. En appliquant une loi sur chacun des astres, montrer que la vitesse angulaire commune vérifie $\omega^2 = \frac{G m_T}{D^3}$.

Référentiel : d'origine G , d'axes pointant vers des étoiles lointaines fixes, supposé galiléen.

Système : P_2 , de masse m_2

Contrainte : d'énoncé : MC de centre G , forces dans le plan, donc coordonnées polaires

BdF : Force gravitationnelle seule $\vec{F}_{1/2} = -\frac{G m_1 m_2}{D^2} \vec{u}_r$, en définissant $\vec{u}_r$ de P_1 vers P_2 .

RFD : $m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{1/2}$ où il faut déterminer $\vec{a}_2$ par la cinématique : $\vec{GP}_2 = R_2 \vec{u}_r$ donc, R_2 étant constante $\vec{v}_2 = R_2 \omega \vec{u}_\theta$, puis $\vec{a}_2 = R_2 \dot{\omega} \vec{u}_\theta - R_2 \omega^2 \vec{u}_r$

Projections :
$$\begin{cases} -m_2 R_2 \omega^2 = -\frac{G m_1 m_2}{D^2} \\ m_2 R_2 \dot{\omega} = 0 \end{cases}$$

On tire de la seconde équation que $\dot{\omega} = 0$ donc que ω est une constante, le MC est donc uniforme,

et de la première que $\omega^2 = \frac{G m_1}{R_2 D^2}$, qui n'est pas encore le résultat demandé, mais $m_1 = \frac{k}{k+1} m_T$ et $R_2 = \frac{k}{k+1} D$, donc $\frac{m_1}{R_2} = \frac{m_T}{D}$.

--

On vérifie que le calcul donne le même résultat sur l'astre P_1 : mêmes référentiel et contraintes, la force est maintenant (actions réciproques) : $\vec{F}_{2/1} = \frac{G m_1 m_2}{D^2} \vec{u}_r$ et le vecteur position est $G\vec{P}_1 = -R_1 \vec{u}_r$: $\vec{v}_1 = -R_1 \omega \vec{u}_\theta$, puis $\vec{a}_1 = -R_1 \dot{\omega} \vec{u}_\theta + R_1 \omega^2 \vec{u}_r$, en gardant la définition précédente de $\vec{u}_r$ (de G vers P_2).

Si l'on change la convention pour que le vecteur $\vec{u}_r$ soit attaché à P_1 , c'est son signe qui change car $\vec{u}_r(P_1) = -\vec{u}_r(P_2)$ (rotation d'angle π) : il reste alors un signe $-$ dans la force, et les vecteurs cinématiques retrouvent leurs expressions usuelles.

On obtient de toute façon (aux signes près qui se simplifient) :
$$\begin{cases} m_1 R_1 \omega^2 = \frac{G m_1 m_2}{D^2} \\ m_1 R_1 \dot{\omega} = 0 \end{cases} \text{ donc}$$

$\omega^2 = \frac{G m_2}{R_1 D^2}$ avec $m_2 = \frac{1}{k+1} m_T$ et $R_1 = \frac{1}{k+1} D$ et la même expression finale de ω^2 .

Partie B : ... et à 2 corps et demi

On s'intéresse à un système M de masse m , négligeable devant m_1 et m_2 : son effet gravitationnel sur les astres est négligeable.

M peut se trouver n'importe où dans l'espace, pas nécessairement sur la droite $(P_1 P_2)$.

On note alors les distances $r_1 = M P_1$, $r_2 = M P_2$ et $r = M G$, et les forces gravitationnelles exercées sur M par $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.

Dans cette partie, on s'intéresse aux positions d'équilibre de M dans le système $(P_1; P_2)$: le mouvement de M est donc « le même » que celui des astres, les distances r, r_1, r_2 restent toujours constantes.

1. Quelle est nécessairement la nature du mouvement de M ? dans quel plan ?

Tout doit tourner « en bloc », comme un solide. On en déduit que le mouvement de M est nécessairement un cercle de centre G, à la vitesse angulaire ω obtenue précédemment, et dans le plan de rotation de $(P_1; P_2)$.

2. En déduire que le vecteur $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ est nécessairement colinéaire au vecteur $\vec{MG}$.

Le mouvement de M étant circulaire uniforme (ω est constante), l'accélération est donc purement radiale (centripète), donc dirigée de M vers G.

D'après la 2ème loi de Newton, on a $m \vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$: le MCU n'est donc possible qu'à la condition de colinéarité.

3. Expliquer pourquoi on peut écrire chaque force gravitationnelle sur M par $\vec{F}_i = G m m_i \frac{\vec{MP}_i}{r_i^3}$.

Voir le schéma : on a par définition $\vec{F}_1 = -\frac{G m m_1}{r_1^2} \vec{u}_{P_1 \rightarrow M}$, avec $\vec{MP}_1 = -r_1 \vec{u}_{P_1 \rightarrow M}$, ce qui donne bien le résultat, et même calcul pour $\vec{F}_2$.

4. En transformant la définition du barycentre pour faire intervenir les vecteurs $\vec{MP}_i$ et $\vec{MG}$, prouver que si M n'est pas sur la droite (P_1P_2) , alors, pour vérifier B.2., il faut et il suffit que $r_1=r_2$. Quel est le lieu des points du plan qui vérifient cette équation ?

On fait intervenir la relation de Chasles, pour introduire le point M :

$$m_1(\vec{GM} + \vec{MP}_1) + m_2(\vec{GM} + \vec{MP}_2) = \vec{0}, \quad m_T \vec{GM} + m_1 \vec{MP}_1 + m_2 \vec{MP}_2 = \vec{0} \quad \text{et avec } \vec{GM} = -\vec{MG}, \text{ on trouve } \vec{MG} = \frac{m_1}{m_T} \vec{MP}_1 + \frac{m_2}{m_T} \vec{MP}_2.$$

$$\text{Par ailleurs, } \vec{F} = \frac{G m m_1}{r_1^3} \vec{MP}_1 + \frac{G m m_2}{r_2^3} \vec{MP}_2.$$

On souhaite que $\vec{F}$ et $\vec{MG}$ soient colinéaires : on peut donc écrire $\vec{F} = \alpha \vec{MG}$, soit

$$\vec{F} = \alpha \left(\frac{m_1}{m_T} \vec{MP}_1 + \frac{m_2}{m_T} \vec{MP}_2 \right) = \frac{\alpha m_1}{m_T} \vec{MP}_1 + \frac{\alpha m_2}{m_T} \vec{MP}_2.$$

Si $M \notin (P_1P_2)$, les deux vecteurs $\vec{MP}_1$ et $\vec{MP}_2$ ne sont pas colinéaires et forment donc une base du plan, ce qui veut dire que tout vecteur se décompose de façon unique sur cette base.

On en déduit $\frac{\alpha m_1}{m_T} = \frac{G m m_1}{r_1^3}$ et $\frac{\alpha m_2}{m_T} = \frac{G m m_2}{r_2^3}$: $\alpha = \frac{G m m_T}{r_1^3} = \frac{G m m_T}{r_2^3}$, ce qui n'est réalisé que si et seulement si $r_1=r_2$, qu'on peut noter r_{12} (notation r interdite : déjà utilisée).

Tous les points M tels que $r_1=r_2$, soit $MP_1=MP_2$, sont situés sur la médiatrice de $(P_1; P_2)$, droite perpendiculaire à (P_1P_2) , passant par leur milieu (si l'on raisonne dans l'espace, le lieu est le plan médiateur de $(P_1; P_2)$).

Remarque : si $M \in (P_1P_2)$, toutes les positions de M conviennent pour que la somme des forces soit colinéaire à $\vec{MG}$: il existe d'autres positions d'équilibre sur cette droite, pas étudiées ici.

5. Avec une seconde propriété obligatoire du mouvement de M, démontrer que $r_1=r_2=D$.
Conclure : rédiger où se situent exactement les positions d'équilibre de M qui ne sont pas sur (P_1P_2) .

On peut maintenant écrire la somme des forces comme $\vec{F} = \frac{G m m_T}{r_{12}^3} \vec{MG}$, et l'on sait que M est en MCU de vitesse angulaire ω .

On définit bien sûr ici le vecteur polaire radial $\vec{u}_r$, de G vers M, donc $\vec{GM} = r \vec{u}_r$, soit $\vec{v} = r \omega \vec{u}_\theta$ et $\vec{a} = -r \omega^2 \vec{u}_r$ (mouvement uniforme : on sait maintenant que ω est constante).

On peut l'écrire $\vec{a} = -\omega^2 \vec{GM} = \omega^2 \vec{MG}$.

La RFD donne alors $m \omega^2 \vec{MG} = \frac{G m m_T}{r_{12}^3} \vec{MG}$, donc (on ne divise pas par un vecteur bien sûr !! on peut le factoriser et identifier au vecteur nul, ou prendre la norme de l'expression...) :

$$\omega^2 = \frac{G m_T}{r_{12}^3}, \text{ mais on a obtenu } \omega^2 = \frac{G m_T}{D^3}.$$

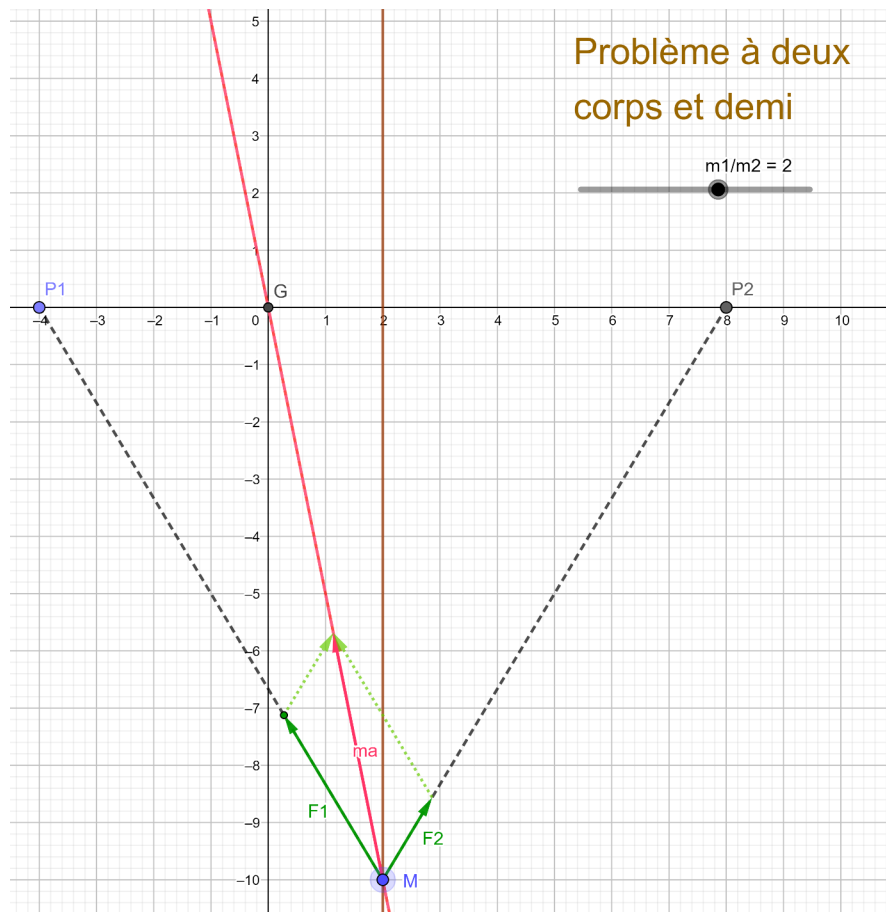
On en déduit $r_{12}^3 = D^3$, donc $r_1=r_2=D$, distance qui sépare les deux astres.

Comme M doit se trouver dans le plan de rotation, on en déduit qu'il y a deux positions d'équilibre, telles que P_1 , P_2 et M forment un triangle équilatéral.

En supposant une rotation dans le sens trigonométrique sur le schéma ci-après :

- une position au-dessus de la droite : M est en avance sur P_2 et en retard sur P_1
- l'autre (schématisée) en-dessous où M est en retard sur P_2 et en avance sur P_1 .

M sur la médiatrice :



M hors de la médiatrice :

