

TD 20 – LOI DES GAZ PARFAITS (ET ÉCARTS), MODÈLE CINÉTIQUE

1. Plongée sous-marine

Un plongeur se trouve dans un lac à la profondeur $\beta = 40 \text{ m}$. Il est équipé d'une bouteille de plongée de volume $V = 12 \text{ L}$, et la pression de l'air enfermé est $P = 200 \text{ bars}$.

À chaque inspiration, de volume $v = 0,5 \text{ L}$, la pression de l'air délivré par le détendeur de la bouteille est la pression environnante, et la pression interne dans la bouteille ne peut pas lui être inférieure. On suppose que la température est uniforme.

- Rechercher (internet, questions aux plongeurs amateurs...) quelle est la pression approximative à -40m (40 m de profondeur) dans l'eau.
- Combien d'inspirations pourra effectuer le plongeur ?

2. Pompe à vélo

Une chambre à air de roue de vélo, de volume constant $V = 500 \text{ cm}^3$ est complètement dégonflée.

Une pompe à vélo est un système qui récupère un volume d'air $v = 100 \text{ cm}^3$ à la pression atmosphérique $P_0 = 1,013 \text{ bar}$, et l'envoie dans la chambre à air.

On suppose que le gonflage est suffisamment lent pour que la température reste toujours égale à la température atmosphérique.

Combien faut-il de coups de pompe pour atteindre la pression $P_1 = 1,800 \text{ bar}$?

3. Paroi mobile

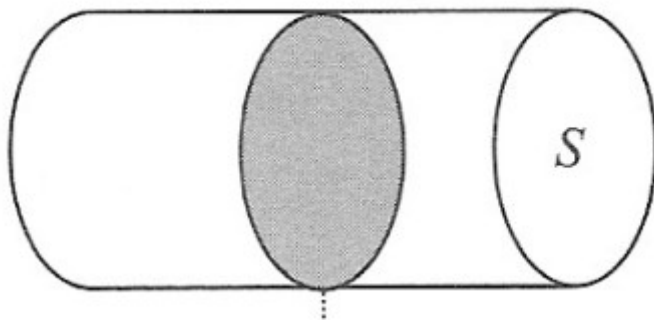
On considère une paroi mobile de masse m et de section (surface S) pouvant coulisser sans frottements dans un tube cylindrique (cylindre).

On se place à l'équilibre mécanique : la paroi est immobile. De chaque côté de la paroi, le cylindre contient un gaz, lui aussi à l'équilibre.

Les deux gaz sont quelconques, et on ne connaît ni leur volume, ni leur température.

On rappelle que la norme de la force de pression F_p exercée par un gaz sur une surface plane S est $F_p = pS$, où p est la pression du gaz. Pour définir complètement \vec{F}_p , il manque un vecteur unitaire à déterminer par le sens physique.

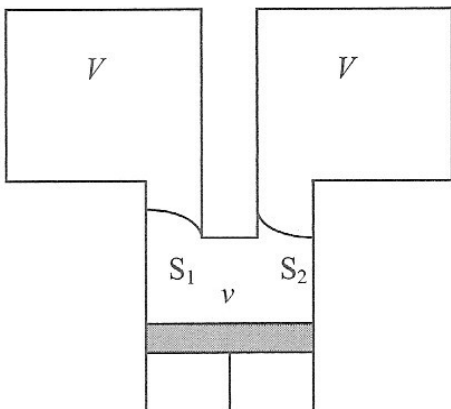
- Le cylindre est horizontal : démontrer par une étude mécanique sur un système bien choisi que les pressions sont nécessairement les mêmes de chaque côté de la paroi.



- Le cylindre est maintenant vertical : obtenir la relation entre les pressions des gaz.

4. Étude d'une pompe

Deux réservoirs, de même volume V , sont mis en communication par une pompe dont le cylindre a un volume maximal v . À l'instant initial, les deux réservoirs contiennent deux gaz parfaits identiques à la même pression P_0 et à la même température T_0 . Le piston est initialement en position haute, de telle sorte que le volume du cylindre est nul au début de l'expérience.



À la descente du piston, la soupape S_1 est ouverte et la soupape S_2 est fermée. À la remontée du piston, la soupape S_1 est fermée et la soupape S_2 est ouverte.

On note P_n^g et P_n^d les pressions respectivement dans le réservoir de gauche et le réservoir de droite après n aller-retours du piston, depuis sa position haute initiale. On suppose que toutes les transformations s'effectuent de manière isotherme, et que le système constitué par le gaz contenu dans les deux réservoirs et le cylindre est fermé.

1. En utilisant une loi de conservation, établir une relation entre P_n^g , P_n^d et P_0 .
2. Quelle est la relation entre P_{n-1}^g et P_n^g ? En déduire les expressions de P_n^g puis de P_n^d en fonction de P_0 , V et v .

5. Diagramme d'Amagat

On considère de la vapeur d'eau à 500°C pour laquelle on effectue des mesures simultanées de pression P et de volume molaire V_m . Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

P (bar)	1,00	10,0	20,0	40,0	70,0	100
V_m (L.mol ⁻¹)	64,3	6,37	3,17	1,56	0,868	0,590

1. Tracez l'isotherme de l'eau à $T = 500^\circ\text{C}$ en coordonnées d'Amagat $PV_m = f(P)$. La vapeur d'eau peut-elle être considérée comme un gaz parfait ?
2. Aux faibles pressions, le modèle du gaz parfait peut être corrigé. On utilise alors l'équation de Van der Waals donnée ci-dessous. Les données permettent-elles de valider ce modèle ?

$$PV_m = RT + (b - a/RT)P$$
3. Par d'autres mesures, on obtient $a = 0,923 \text{ J.m}^3.\text{mol}^{-2}$. Par une analyse dimensionnelle, montrez que b est homogène à un volume molaire que l'on appelle covolume. Le covolume correspond au volume occupé par les molécules d'une mole d'eau, ce qui rend ce volume inaccessible. Déterminez sa valeur compte tenu des données mesurées. On a la constante des gaz parfaits $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.
4. En assimilant les molécules d'eau à des sphères de rayon r , estimez l'ordre de grandeur de la taille des molécules d'eau. Le nombre d'Avogadro est $N_A = 6,02.10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

6. Isothermes de Van der Waals

L'équation de Van der Waals modélise un fluide bien mieux que la loi des gaz parfaits, lorsqu'on s'approche de la liquéfaction.

On donne cette équation d'état : $\left(P + a \frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$ où a et b sont des constantes positives, caractéristiques du gaz.

1. Obtenir leur unité SI par analyse dimensionnelle.

Lorsqu'on fixe la température, on obtient une courbe, dite isotherme de Van der Waals, tracée dans le diagramme de Clapeyron : P en ordonnée, donc fonction du volume V en abscisse.

On obtient donc une famille d'isothermes, paramétrées par la température. Parmi ces courbes, une seule d'entre elles est strictement décroissante et présente un plateau horizontal.

2. Calculer littéralement les dérivées première et seconde $P'(V)$ et $P''(V)$.

On appelle *température critique* T_c la température correspondant à cette courbe particulière, *volume critique* V_c l'abscisse du plateau et *pression critique* P_c son ordonnée.

Pour cette isotherme à $T=T_c$, lorsque $V=V_c$, on a donc $P'(V)=0$ et $P''(V)=0$.

3. Sans développer, mais en éliminant les dénominateurs par des produits en croix, en déduire le système d'équations vérifiées par V et T dans ces conditions (au plateau).

4. En déduire que $V_c=3nb$, puis que $T_c=\frac{8a}{27Rb}$, puis que $P_c=\frac{a}{27b^2}$

On introduit les variables réduites $\pi=\frac{P}{P_c} \Leftrightarrow P=\pi P_c$, $\beta=\frac{V}{V_c}$ et $\tau=\frac{T}{T_c}$.

5. En remplaçant les variables ordinaires par les variables réduites dans l'équation de Van der Waals, montrer qu'on obtient l'équation réduite $\left(\pi + \frac{3}{\beta^2}\right)(3\beta - 1) = 8\tau$.

6. On fixe τ : quel est le domaine de définition de la fonction $\pi(\beta)$?

Compléter (fichier .py joint) le code Python suivant pour obtenir quelques courbes $\pi(\beta)$:

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2
3 # VdW réduite  $(\pi+3/\beta^2)(3\beta-1)=8\tau$ 
4
5 def pressionRedVdW (tRed,vRed) :
6     # à compléter
7
8 N=100
9 VredMax=4
10 h=(VredMax-1/3)/N
11 volumes=[1/3+(i+1)*h for i in range(N)]
12
13 temperatures=[0.8,0.9,1.0,1.1,1.3,1.5,1.8]
14
15 plt.ylim(ymax=2)
16 for tRed in temperatures :
17     pressions = [pressionRedVdW(tRed,vRed) for vRed in volumes]
18     plt.plot(volumes,pressions,label=str(tRed))
19 plt.legend()
20 plt.show()
```

En réalité, la zone où la courbe est croissante correspond à des états instables, car P et V ne peuvent pas augmenter simultanément à température donnée : le système se divise alors en deux phases, liquide et gaz (vapeur), et un palier horizontal remplace cette portion de courbe.

7. Le néon

Du néon Ne, GP monoatomique de masse molaire $M=20\text{ g/mol}$, occupe un volume V sous une pression P à température uniforme $T=0^\circ\text{C}$.

1. Quelle est la pression si la densité moléculaire est $n^* = 1,34 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$?
2. Quelle est la vitesse quadratique moyenne u des atomes de néon ?

8. Atmosphère des planètes

Planète	Diamètre équatorial en km	Rapport de la masse à celle de la Terre
Mercure	4878	0,055
Vénus	12 104	0,815
Terre	12 756	1
Mars	6794	0,107

Masse de la Terre : $M_T = 5,976 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$; masse des molécules : $m_{\text{H}_2} = 3,3 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ et $m_{\text{N}_2} = 4,65 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$; constante Boltzmann : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$.

1. Calculer la seconde vitesse cosmique v_2 , ou vitesse de libération, pour chacune de ces planètes.
2. Calculer la vitesse quadratique moyenne u pour le dihydrogène et le diazote, à la température de 300 K.

Les molécules les plus rapides s'échappent de l'atmosphère en quantité non négligeable lorsque la vitesse quadratique moyenne atteint le dixième de la vitesse de libération.

Du coup, elles sont remplacées par de nouvelles molécules rapides suite à des chocs intermoléculaires ultérieurs, et l'atmosphère finit par se dépeupler complètement (on parle de « dépeuplement par le haut de la distribution »).

3. Conclure sur la stabilité des deux espèces gazeuses dans l'atmosphère des planètes.
4. Quelle température faudrait-il avoir sur Terre pour que le diazote s'échappe de l'atmosphère ?

9. Effusion gazeuse

On considère un gaz parfait, occupant un récipient indéformable de volume V .

Sa quantité de matière est notée n . On note N_A la constante d'Avogadro.

- a) En déduire l'expression de sa densité volumique de particule n^* .

On perce un trou très petit, de surface s , dans le récipient : les molécules s'échappent doucement, et il y a à tout moment le vide à l'extérieur (aucune molécule ne passe en sens inverse).

La dimension du trou est telle qu'on peut supposer que la densité volumique de particule reste uniforme dans le récipient (elle varie bien sûr dans le temps).

On reprend le modèle simplifié du calcul de la pression cinétique : la vitesse moléculaire a toujours comme valeur la vitesse quadratique moyenne u , dans 6 orientations possibles.

- b) On considère une durée dt très petite : quelle est le nombre δN de molécules qui traversent le trou pendant dt ?

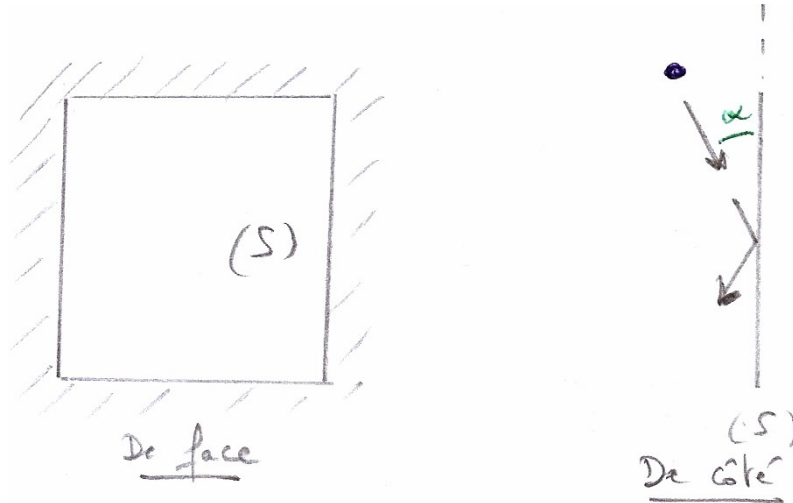
- c) Quelle est la relation entre dN , variation algébrique du nombre de molécules dans le récipient, et δN ?

En déduire l'équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par la quantité de matière n dans le récipient.

- d) Exprimer sa constante de temps τ en fonction de u , s et V .
 e) Le volume du récipient est $V=1\text{ L}$. Quel est l'ordre de grandeur de u ?

Proposer des valeurs pour la surface puis le rayon du trou, afin d'obtenir une valeur de constante de temps raisonnable avec les hypothèses faites.

10. Pression cinétique de la pluie



Il pleut sur une fenêtre verticale de 2 m^2 de surface S . Cette pluie frappe la fenêtre de façon régulière selon un angle α constant de 30° par rapport à la verticale. Il y a une densité volumique n^* de 800 gouttes par m^3 , une goutte ayant toujours une vitesse $v=2\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et une masse $m=0,1\text{ g}$.

Nous supposons que les gouttes rebondissent sur la vitre avec le même angle α et la même vitesse v .

1. Combien de gouttes rebondissent sur la fenêtre pendant la durée $t=1\text{ s}$?
2. En déduire la force résultante puis la pression cinétique exercée par les gouttes sur la vitre.

On construira avec soin la variation vectorielle de quantité de mouvement.