

# Corrigé du problème de physique de Centrale I MP 2010

## Projet MOSE

### Partie I

#### A) Equilibre en dehors des marées

1) Pour placer le centre d'inertie du système, on utilise les centres d'inertie des sous systèmes caisson vide et eau contenue dans le caisson. Ces sous-systèmes étant homogènes, les centres d'inertie sont placés en leurs centres géométriques : en  $l/2$  et  $h/2$ . On a donc :

$$\lambda_c l \frac{l}{2} + \lambda_e h \frac{h}{2} = (\lambda_c l + \lambda_e h) OG = \lambda_c \frac{l^2}{2} + \lambda_e \frac{h^2}{2} \text{ soit encore } OG = \frac{\lambda_c \frac{l^2}{2} + \lambda_e \frac{h^2}{2}}{\lambda_c l + \lambda_e h}.$$

2) On commence par calculer le moment en O puis on projette sur l'axe Ox :

$$\vec{M}_O = \vec{OG}_c \wedge (\lambda_c l) g (-\vec{e}_z) + \vec{OG}_e \wedge (\lambda_e h) g (-\vec{e}_z) = -(\lambda_c \frac{l^2}{2} + \lambda_e \frac{h^2}{2}) g \cos(\theta) \vec{e}_x \text{ soit, en projection :}$$

$$M_x(\vec{P}) = -(\lambda_c \frac{l^2}{2} + \lambda_e \frac{h^2}{2}) g \cos(\theta).$$

3) a) On utilise l'équilibre du solide : le champ de pression dans les fluides n'est alors pas perturbé et identique à ce qu'il est en l'absence de solide (deuxième et troisième figures). Hors, à l'équilibre les actions de pression et du poids se compensent pour les deux portions de fluides déplacés par la présence d l'objet : la somme des forces de pression sur la partie du bas est ainsi opposée au poids du volume de liquide déplacé (idem pour le haut). La somme des deux actions est donc l'opposé de la somme des poids des volumes fluides déplacés. Notons que les actions de pression à l'interface, non subies par l'objet, se compensent par principe des actions réciproques.

b) On utilise le même raisonnement sur les moments : le moment des actions de pression sur l'objet est l'opposé des moments des poids des volumes fluides déplacés. Notons que ces poussées d'Archimède s'exercent au centre de masse des fluides déplacés.

4) On néglige ici la poussée de l'atmosphère (masse volumique de  $1,3 \text{ kg.m}^{-3} \ll \rho_e = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ ). La poussée d'Archimède s'exerce au centre de la partie immergée. On distingue alors deux cas :

$\sin(\theta) < H/l$  : le caisson n'est pas entièrement immergé. La masse d'eau déplacée est  $\lambda_e H/\sin(\theta)$  et

le moment  $M_{Ox}(\vec{f}_p) = \lambda_e \frac{H^2}{2 \sin^2(\theta)} g \cos(\theta)$  (calcul identique à celui du 2) en changeant le signe car la

poussée est opposée au poids et en remplaçant  $h$  par  $H/\sin(\theta)$ )

$\sin(\theta) > H/l$  : le caisson est alors entièrement immergé.  $H/\sin(\theta)$  est alors remplacé par et

$M_{Ox}(\vec{f}_p) = \lambda_e \frac{l^2}{2} g \cos(\theta)$ . Ces expressions rendent compte du fait que la poussée d'Archimède a

tendance à faire tourner le caisson dans le sens positif, i.e. de  $y$  vers  $z$  dans le premier quadrant contrairement au poids)

5) a) Les seules actions ayant un moment non nul autour de l'axe Ox sont le poids et la poussée d'Archimède (liaison idéale). Ils doivent donc se compenser pour qu'il y ait équilibre. On a donc :

$$M_{Ox}(\vec{f}_p) = \lambda_e \frac{l^2}{2} g \cos(\theta) = -M_x(\vec{p}) = (\lambda_c \frac{l^2}{2} + \lambda_e \frac{h^2}{2}) g \cos(\theta) . \text{ Ceci n'est possible que si}$$

$$\lambda_c \frac{l^2}{2} + \lambda_e \frac{h^2}{2} = \lambda_e \frac{l^2}{2} \text{ soit } h^2 = \frac{\lambda_e - \lambda_c}{\lambda_e} l^2 \text{ ce qui n'est possible que si } \lambda_e > \lambda_c. \text{ On calcule avec les}$$

valeurs numériques du texte :

$\lambda_e = \rho_e S = 90.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\lambda_c = m/l = 12.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  ce qui vérifie largement la condition. Cette condition exprime que la poussée d'Archimède à vide, c'est-à-dire sans eau dans le caisson, doit pouvoir compenser le poids.

Notons qu'alors l'équilibre obtenu est indifférent.

b) Lorsque le caisson est émergé, l'égalité précédente devient :

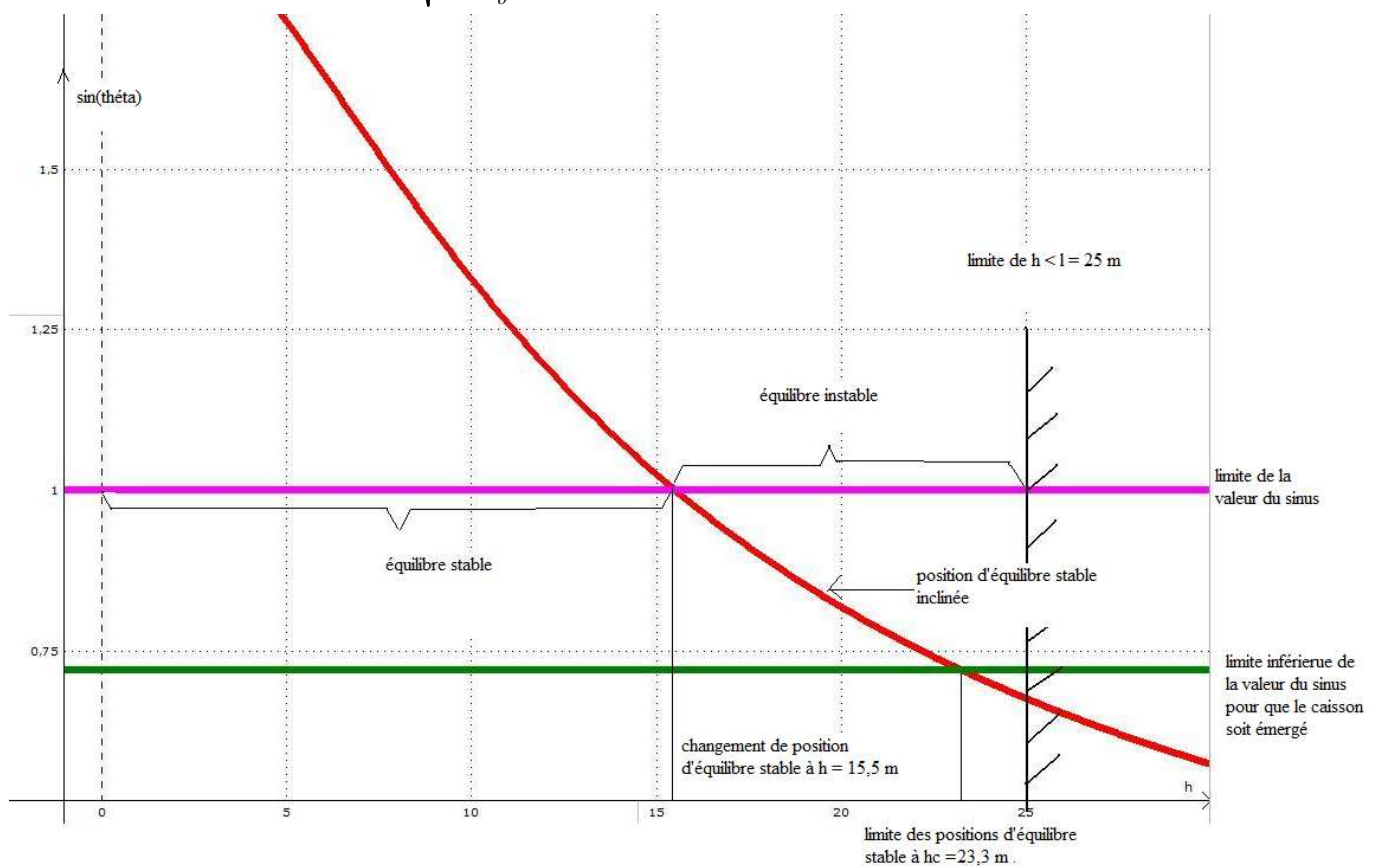
$$M_{Ox}(\vec{f}_p) = \lambda_e \frac{H^2}{2 \sin^2(\theta)} g \cos(\theta) = -M_x(\vec{p}) = (\lambda_c \frac{l^2}{2} + \lambda_e \frac{h^2}{2}) g \cos(\theta). \text{ Ceci n'est possible si } \cos(\theta) = 0$$

(position verticale) ou si  $\sin^2(\theta) = \frac{\lambda_e H^2}{\lambda_c l^2 + \lambda_e h^2}$  qui peut définir deux position d'équilibre symétriques

par rapport à la verticale si la valeur obtenue pour  $\sin(\theta)$  est comprise entre  $H/l = 0,720$  et  $1,00$  (situation émergée). Il existe donc soit une position d'équilibre, soit trois.

On doit ensuite tracer  $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{\lambda_e H^2}}{\sqrt{\lambda_c l^2 + \lambda_e h^2}}$ . Il est alors commode de poser  $A = \frac{\sqrt{\lambda_e} H}{\sqrt{\lambda_c} l}$  et  $\frac{1}{h_0} = \sqrt{\frac{\lambda_e}{\lambda_c} \frac{1}{l}}$ .

Ceci permet d'obtenir  $\sin(\theta) = \frac{A}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{h_0^2}}}$ . Numériquement, on calcule  $A = 1,97$  et  $h_0 = 9,13 \text{ m}$ .



Les valeurs limites de  $\sin(\theta)$  ont été donnée précédemment (0,72 et 1). Les valeurs limites de  $h$  sont obtenue lors de la bifurcation (changement de position d'équilibre stable) et fin de stabilité.

Pour la première,  $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{\lambda_e H^2}}{\sqrt{\lambda_c l^2 + \lambda_e h^2}} = 1$  qui conduit à  $\lambda_e H^2 = \lambda_c l^2 + \lambda_e h_{cl}^2$ , soit  $h_{cl} = \sqrt{H^2 - \frac{\lambda_c}{\lambda_e} l^2}$

qui donne 15,5 m après application numérique.

Pour la seconde,  $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{\frac{\lambda_e H^2}{\lambda_c l^2}}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda_e h^2}{\lambda_c l^2}}} = \frac{H}{l}$  qui conduit à  $\frac{\lambda_e}{\lambda_c} = 1 + \frac{\lambda_e h_{c2}^2}{\lambda_c l^2}$  et donc  $h_{c2} = l \sqrt{1 - \frac{\lambda_c}{\lambda_e}}$  qui

donne 23,3 m.

c) Le graphe semble montrer qu'il y a bifurcation pour  $h_{c1}$ . Si on développe l'équation du mouvement de la barre autour de  $\pi/2$  à l'ordre un

( $J\ddot{\theta} = M_{Ox} = \lambda_e \frac{H^2}{2\sin^2(\theta)} g \cos(\theta) - (\lambda_c \frac{l^2}{2} + \lambda_e \frac{h^2}{2})g \cos(\theta)$  en posant  $\theta = \pi/2 + \varepsilon$  ; J introduit plus loin

dans le texte...), on obtient  $J\ddot{\varepsilon} = \lambda_e \frac{H^2}{2} g(-\varepsilon) + (\lambda_c \frac{l^2}{2} + \lambda_e \frac{h^2}{2})g\varepsilon$  car  $\cos(\theta) = \cos(\pi/2 + \varepsilon) = \cos(\pi/2)\cos(\varepsilon) - \sin(\pi/2)\sin(\varepsilon) = -\varepsilon$  et  $\sin(\theta) = \sin(\pi/2 + \varepsilon) = \cos(\pi/2)\sin(\varepsilon) + \cos(\varepsilon)\sin(\pi/2) = 1$ . L'équation

du mouvement  $\ddot{\varepsilon} + (\lambda_e \frac{H^2}{2J} - \lambda_c \frac{l^2}{2J} - \lambda_e \frac{h^2}{2J})g\varepsilon = 0$  ne décrit les petits mouvements autour d'une

position d'équilibre stable que si elle est une équation d'oscillateur harmonique :

$\lambda_e \frac{H^2}{2J} - \lambda_c \frac{l^2}{2J} - \lambda_e \frac{h^2}{2J} \geq 0$  et donc  $H^2 - \frac{\lambda_c}{\lambda_e} l^2 \geq h^2$  ce qui donne bien la condition trouvée en b). On

se référera au graphe pour ce qui est alors des stabilités.

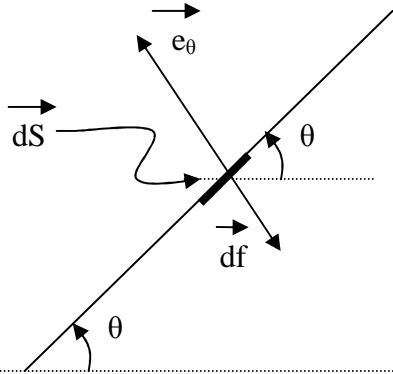
## B) Etude du régime transitoire

1) a) On utilise les dimensions de la force donnée et celle du poids :

$[f] = [C_f \rho_e v^\alpha dS] = [m l^{-3} v^\alpha l^2] = [m(l/t)^\alpha l^{-1}] = [m l^{\alpha-1} t^{-\alpha}] = [mg] = [m l t^{-2}]$ .

On identifie alors  $\alpha - 1 = 1$  et  $-\alpha = -2$  qui donnent  $\underline{\alpha = 2}$ . C'est un frottement quadratique.

b)



Le caisson est supposé entièrement dans l'eau. La petite force de frottement subie sur  $dS$  a un moment :

$dM = \overline{OM} \wedge d\vec{f}_f = Y\vec{e}_y \wedge -C_f \rho_e v Y \dot{\theta} \vec{e}_\theta L dY = -C_f \rho_e Y^3 L dY \text{signe}(\theta) \dot{\theta}^2 \vec{e}_x$ . On somme sur la longueur de

la barre :  $\vec{M} = -C_f \rho_e \frac{l^4}{4} L \text{signe}(\theta) \dot{\theta}^2$  ce qui permet d'identifier  $f = C_f \rho_e \frac{l^4}{4} L$ .

Numériquement,  $\underline{f = 3,91 \cdot 10^9 \text{ kg.m}^2}$

2) a) On utilise l'extensivité de J :  $J = \frac{1}{3} M_e h^2 + \frac{1}{3} M_c l^2 = \frac{1}{3} \lambda_e h^3 + \frac{1}{3} \lambda_c l^3$  ce qui donne

numériquement :  $\underline{J = 123 \cdot 10^6 \text{ kg.m}^2}$ .

b) Appliquons alors le théorème du moment cinétique appliqué au caisson en projection sur  $Ox$  en supposant toujours valable l'expression du moment des actions de pressions (établis en statique) :

$J\ddot{\theta} = -f \text{signe}(\dot{\theta}) \dot{\theta}^2 - (\lambda_e \frac{h^2}{2} + \lambda_c \frac{l^2}{2} - \lambda_e \frac{l^2}{2})g \cos(\theta)$  ce qui conduit à

$$\ddot{\theta} + \frac{C_f \rho_e \frac{l^4}{4} L}{J} \text{signe}(\dot{\theta}) \dot{\theta}^2 + \frac{(\lambda_e \frac{h^2}{2} + \lambda_c \frac{l^2}{2} - \lambda_e \frac{l^2}{2})}{J} g \cos(\theta) = 0 \quad \text{On identifie alors :}$$

$$a = \frac{C_f \rho_e \frac{l^4}{4} L}{J} = \frac{f}{J} \quad \text{et} \quad b = \frac{(-\lambda_e \frac{h^2}{2} - \lambda_c \frac{l^2}{2} + \lambda_e \frac{l^2}{2})}{J} g \quad \text{ce qui conduit numériquement à :}$$

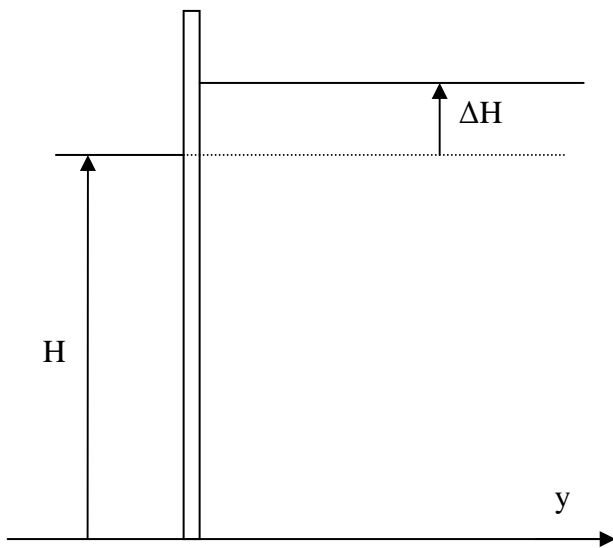
$$a = 31,9 \quad \text{et} \quad b = 1,38 \text{ s}^{-2}.$$

On remarque que b est bien positif ce qui assure la stabilité du système autour de  $\pi/2$  (barre immergée en entier). En effet,  $\cos(\theta) = -\varepsilon$  assure bien une équation d'oscillateur harmonique autour de  $\varepsilon = 0$  comme vu en A)5)c).

3) Si le mouvement de rotation est quasi uniforme, la dérivée seconde peut être considérée comme quasi nulle. On a alors  $\dot{\theta}^2 = \frac{b}{a} \cos(\theta)$ .  $\cos(\theta)$  étant de l'ordre de  $1/2$  sur l'ensemble de la remontée, on aboutit

à  $\dot{\theta} \approx \sqrt{\frac{b}{2a}} = \sqrt{\frac{2}{40}}$ . Comme  $\dot{\theta} \approx \frac{\pi}{2\tau}$ , on aboutit à  $\tau \approx \frac{\pi\sqrt{20}}{2}$  soit environ 7 s. On retrouve bien l'ordre de grandeur du temps obtenu par simulation numérique : 10 s.

### C) Equilibre en présence des marées



On vérifie que  $M_{Ox}$  n'est plus nul pour la position verticale :  $f(\theta)$  n'étant pas infini, le premier terme est nul mais le deuxième vaut B, non nul. Le caisson bascule donc à partir de cette position. Ceci traduit la surpression qui existe à droite due au niveau d'eau supérieur.

a) On voit bien un moment positif en  $\pi/2$  qui fait basculer le caisson vers la lagune comme dans la figure d'introduction. L'équilibre est trouvé vers  $108^\circ$  et est stable puisque si  $\theta$  augmente, le moment devient négatif et ramène le caisson vers sa position d'équilibre.

b) Le cas où  $h = 23$  m est bien différent du précédent : il existe maintenant deux positions d'équilibre et elles sont toutes deux avant  $\pi/2$  ! Seule la première (à un peu plus de  $50^\circ$ ) est stable (même raisonnement qu'en a)) la limite fixée par la taille du dispositif étant de  $46^\circ$  ( $\sin(\theta) = 0,72$ ). Cette situation n'est donc guère souhaitable, la houle pouvant faire basculer le caisson et provoquer un débordement. On préférera une situation pour laquelle  $h$  est moins élevé mais il ne doit pas être nul car il manquerait alors d'inertie et serait trop ballotté par la houle.

## Partie II – Etude de la compression et de l'injection de l'air dans le caisson

### A) Compression de l'air dans le caisson

1) On utilise l'équation des gaz parfait :  $P_1(V_c + Nv) = n_0RT_0 = P_0((V_c + Nv + NV_0))$ . On en déduit donc que  $P_1 = P_0 \frac{V_c + Nv + NV_0}{V_c + Nv}$ .

En faisant la différence des équations d'état dans le caisson avant et après pompage, on trouve :

$$(P_1 - P_0)V_c = \Delta nRT_0 = P_0V_c \frac{NV_0}{V_c + Nv} \text{ et donc } \Delta n = \frac{P_0V_c}{RT_0} \frac{NV_0}{V_c + Nv}$$

Numériquement, on trouve  $\underline{P_1 = 1,13 \text{ bar}}$  et  $\underline{\Delta n = 803 \text{ mol}}$ .

2) Pour que  $S_2$  s'ouvre, il faut équilibrer la pression qui vaut donc  $P_0$ . L'équation d'état des gaz parfaits donne alors :  $P_0(Nv + Nsx_1) = P_1Nv$  par conservation de la quantité de matière ( $S_1$  est alors fermée).

$$\text{On a alors : } P_0Nsx_1 = (P_1 - P_0)Nv = P_0 \frac{NV_0}{V_c + Nv} Nv \text{ et donc } x_1 = \frac{NV_0}{V_c + Nv} \frac{v}{s} = \frac{Nd}{V_c + Nv} v$$

3) La compression étant isotherme, elle est mécaniquement réversible ( $n_0$  la quantité d'air contenue dans l'ensemble du volume au début du processus) :

$$w = -\int_0^1 PdV = -\int_0^1 n_0RT_0 \frac{dV}{V} = -n_0RT_0 \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) = P_0(V_c + Nv + NV_0) \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) \text{ ce qui conduit finalement à :}$$

$$w = P_0(V_c + Nv + NV_0) \ln\left(\frac{V_c + Nv + NV_0}{V_c + Nv}\right)$$

D'après le premier principe de la thermodynamique,  $\Delta U = w + q$  ; comme la transformation est isotherme et que pour un gaz parfait  $U$  ne dépend que de  $T$ , on en déduit que  $\underline{q = -w}$

A.N. :  $\underline{w = -q = 2,12 \text{ MJ}}$ .

4) Pour obtenir le travail fourni par le moteur, il faut ôter à  $w$  le travail de l'atmosphère qui est  $P_0NV_0$ . (- la pression constante fois la variation du volume lors de la compression).

Ceci donne donc :

$$W_a = P_0(V_c + Nv + NV_0) \ln\left(\frac{V_c + Nv + NV_0}{V_c + Nv}\right) - P_0NV_0 = P_0(V_c + Nv + NV_0) \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) - P_0NV_0 \text{ ou encore}$$

$$W_a = P_1(V_c + Nv) \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) - P_0NV_0$$

Pour le retour, le moteur ne travaille que jusqu'à  $x_1$ , l'égalité des pressions et le fait de négliger les frottements reste son travail nul pour la suite. On a alors :

$$W_r = P_0Nsx_1 - n_0RT_0 \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) \text{ par le même calcul que précédemment avec } n_0', \text{ le nombre de moles d'air}$$

dans  $Nv$  au début du retour à la pression  $P_1$ . Ceci conduit à  $W_r = P_0N \frac{NV_0v}{V_c + Nv} - P_1Nv \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)$ . En

sommant, on trouve donc :  $W_m = W_a + W_r = (P_1(V_c + Nv) - P_1Nv) \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) - P_0NV_0 + P_0N \frac{NV_0v}{V_c + Nv}$  et

$$\text{donc } W_m = P_1V_c \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) + P_0NV_0 \left(\frac{Nv}{V_c + Nv} - 1\right) = P_1V_c \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) + P_0NV_0 \frac{-V_c}{V_c + Nv} \text{ . Comme}$$

$$P_1 - P_0 = P_0 \frac{-NV_0}{V_c + Nv}, \text{ on trouve bien : } W_m = P_1V_c \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) + (P_0 - P_1)V_c \text{ comme demandé.}$$

Numériquement, on trouve  $\underline{W_m = 120 \text{ kJ}}$ .

On se rend compte que le retour réduit sensiblement le travail à fournir : il serait souhaitable que les dix pompes fonctionnent de manière décalée pour que l'effort soit régulier.

5) Pour provoquer l'ouverture de la soupape, la pression atteinte lors de la compression doit dépasser  $P_i$ . La plus grande pression atteinte en cas de non ouverture doit donc excéder  $P_i$ . Ceci se traduit par :

$$P_0 \frac{Nv + NV_0}{Nv} \geq P_i \text{ soit } P_0 \left(1 + \frac{V_0}{v}\right) \geq P_i.$$

A l'ouverture de la soupape, on réalise l'égalité des pressions :  $P_0 \frac{v + V_0}{v + s\alpha_{i+1}} = P_i$  ce qui donne

$$\alpha_{i+1} = \frac{P_0}{P_i} \frac{v - V_0}{s} - \frac{v}{s}.$$

En bout de course, la pression  $P_{i+1}$  vérifie par conservation de la matière et en écrivant la loi des gaz parfaits :  $P_{i+1}(V_c + Nv) = P_0(Nv + NV_0) + V_c P_i$ . En divisant par le volume final, on obtient alors :

$$P_{i+1} = P_0 \frac{Nv + NV_0}{V_c + Nv} + \frac{V_c P_i}{V_c + Nv}. \text{ On identifie alors } b - ab = \frac{Nv + NV_0}{V_c + Nv} \text{ et } a = \frac{V_c}{V_c + Nv}. \text{ On en tire alors}$$

$$b = \frac{Nv + NV_0}{V_c + Nv} \frac{1}{1 - a} = \frac{v + V_0}{v}.$$

Numériquement, on trouve :  $a = 150/155 = 0,968$  et  $b = 2,5/0,5 = 5$ .

6) La relation précédente indique que  $P_i - bP_0$  est en progression géométrique de raison  $a$ . On a donc :  $P_n - bP_0 = a^n(P_0 - bP_0)$  et donc  $P_n = P_0[b + a^n/(1 - b)] = P_n = P_0(5 - 4a^n)$ .

Pour  $n$  infini, on trouve  $P_\infty = 5P_0$  car  $a < 1$ .

Cette valeur est obtenue lorsque la soupape est à la limite de s'ouvrir lorsque le piston est en bout de course :  $P_0 \left(1 + \frac{V_0}{v}\right) = P_\infty$  ce qui donne bien  $P_\infty = 5P_0$ .

7) a) On reprend le calcul du 3) en l'adaptant à  $\delta n$  et à la pression finale  $P(t)$  :

$$\delta W_{m,i+1} = - \int_0^t P dV = - \int_0^t \delta n RT_0 \frac{dV}{V} = - \delta n RT_0 \ln\left(\frac{V_t}{V_0}\right) = \delta n RT_0 \ln\left(\frac{P(t)}{P_0}\right).$$

b) Pour voir le lien entre  $\delta n$  et  $dP$ , on doit différentier l'équation d'état :  $dPV_c = \delta n RT_0$ .

c) On a donc :  $\delta W_{m,i+1} = \delta n RT_0 \ln\left(\frac{P(t)}{P_0}\right) = V_c \ln\left(\frac{P(t)}{P_0}\right) dP$  ce qui conduit, en intégrant depuis la

pression de départ  $P_i$  jusqu'à la pression finale  $P_{i+1}$  à :

$$W_{m,i+1} = \int_{P_i}^{P_{i+1}} V_c \ln\left(\frac{P(t)}{P_0}\right) dP = P_0 V_c \left[ \frac{P}{P_0} \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) - \frac{P}{P_0} \right]_{P_i}^{P_{i+1}} = P_0 V_c \left( \frac{P_{i+1}}{P_0} \ln\left(\frac{P_{i+1}}{P_0}\right) - \frac{P_{i+1}}{P_0} - \frac{P_i}{P_0} \ln\left(\frac{P_i}{P_0}\right) + \frac{P_i}{P_0} \right).$$

d) on constate que  $W_{m,1} = P_0 V_c \left( \frac{P_1}{P_0} \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) - \frac{P_1}{P_0} - \frac{P_0}{P_0} \ln\left(\frac{P_0}{P_0}\right) + \frac{P_0}{P_0} \right) = P_0 V_c \left( \frac{P_1}{P_0} \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) - \frac{P_1}{P_0} + 1 \right)$  qui

s'identifie bien à  $W_{m,1} = P_1 V_c \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) + (P_0 - P_1) V_c$  trouvé précédemment.

8) En sommant sur les  $n$  va-et-vient la plupart des termes s'éliminent eux à deux :

$$W_t = P_0 V_c \left( \frac{P_n}{P_0} \ln\left(\frac{P_n}{P_0}\right) - \frac{P_n}{P_0} - \frac{P_0}{P_0} \ln\left(\frac{P_0}{P_0}\right) + \frac{P_0}{P_0} \right) \text{ soit } W_t = P_0 V_c \left( \frac{P_n}{P_0} \ln\left(\frac{P_n}{P_0}\right) - \frac{P_n}{P_0} + 1 \right).$$

9) Numériquement, on trouve :  $P_\infty = 5,00$  bar.

Après  $v$  coup la pression dans le caisson est  $5-4a^v$  qui doit être supérieure à 3 (en bar). On aboutit donc à :  $5-4a^v > 3$  soit  $2 > 4a^v$  donc  $a^v < \frac{1}{2}$ . Passant au logarithme, on trouve alors  $v > -\frac{\ln(2)}{\ln(a)}$  C qui

donne 21,14. On retiendra qu'il faut 22 coups pompe pour dépasser 3 bar. La pression obtenue en fin de pompage est alors  $5-4a^{22}$  (en bar) soit 3,06 bar la différence est faible par rapport à 3 bar. S'il existe une vanne s'ouvrant à 3 bar précisément, l'eau commencera à d'évacuer lors de ce 22<sup>ème</sup> coup de pompe.

Pour le travail nécessaire pour obtenir cette pression, on obtient  $W_t = 20,4$  MJ. Notons qu'il est bien supérieur à 22 fois le travail nécessaire au premier coup de pompe : le pompage réclame donc plus de puissance en fin de processus.

## B) Evacuation de l'eau du caisson

1) On fait la différence des équations d'état entre le volume  $V_c$  initial et le volume  $V_f$  final pour obtenir la quantité d'air  $n_a$  refoulée par les pompes :  $P_f(V_f - V_c) = n_a RT_0$  et donc,  $n_a = \frac{P_f(V_f - V_c)}{RT_0}$  ce qui donne numériquement 121 kmol.

2) En reprenant la démarche du A), on trouve un travail élémentaire  $\delta W = \delta n RT_0 \ln\left(\frac{P_f}{P_0}\right)$  pour introduire  $\delta n$  moles d'air à la pression  $P_f$  dans le caisson. On somme alors pour retrouver les  $n_a$  moles à introduire pour finir le remplissage :  $W_t = n_a RT_0 \ln\left(\frac{P_f}{P_0}\right) = P_f(V_f - V_c) \ln\left(\frac{P_f}{P_0}\right)$  ce qui donne 320 MJ.

3) Le travail total fourni par les pompes est donc de  $W_{tot} = 340$  MJ. C'est de loin le refoulement qui est le plus gourmand d'un point de vue énergétique.

Pour que l'opération ne dure pas plus d'une heure, la puissance des pompe doit être supérieure à  $W_{tot}$  divisé par la durée de l'opération soit 94,5 kW. C'est une puissance à la hauteur de l'énormité du dispositif !

4) Pour alimenter les pompes en énergie, on pense bien sûr à des moteurs électriques mais ils posent le problème des infiltrations d'eau et de risque de court-circuit qui s'en suivent. Des moteurs thermiques demandent de l'air pour fonctionner et ne peuvent être installés au fond de la lagune. Une solution avec pompes émergée est probablement retenue mais pose le problème de la distribution de l'air sous pression.

L'avantage du projet MOSE est de contenir la marée et réduire l'impact de l'acqua alta sur Venise mais il réduit la circulation des bateaux lors de la mise en œuvre des vannes et ne résout pas le problème de fond : enlèvement de Venise et montée du niveau des eaux océaniques par fonte des glaciers terrestres. Celle-ci est due au changement climatique induit par les rejets anthropiques de gaz à effet de serre et ne peut être régulé que sur un long terme et de manière internationale.

Le projet MOSE est ambitieux et la cité des Doges mérite d'être préservée pour les trésors qu'elle renferme et le témoignage de notre passé. On peut cependant se demander si le projet MOSE n'est pas, pour paraphraser Marguerite Duras, un frêle *barrage contre l'Adriatique* !

## Partie III – Le phénomène des marées

### A) Le potentiel gravitationnel

1) Par définition du champ de gravitation en M,  $\vec{A} = \frac{\vec{F}}{m_2} = -\frac{Gm_1}{OM^3} \overrightarrow{OM}$ .

2) Les forces analogues sont la force coulombienne et la force de gravitation : -G est analogue à  $1/4\pi\epsilon_0$ , m à la charge q. Le théorème de Gauss en gravitation est donc : le flux du vecteur champ de gravitation sortant d'une surface fermée vaut  $-(4\pi G)$  multiplié par la masse contenue dans la surface :

$$\oiint \vec{A} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{\text{intérieure}}.$$

Ce qui donne à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique :  $4\pi r^2 A(r) = -4\pi Gm$ . On retrouve le champ de gravitation d'une particule de masse m située au centre de la distribution sphérique.

### B) Marées océaniques

1) a) Le référentiel de Copernic est centré sur le centre de masse du système solaire et des étoiles lointaines fixent les directions de ses axes cartésiens. Le référentiel géocentrique est en translation par rapport à celui de Copernic et centré sur le centre de la Terre.

b) Le théorème de la résultante cinétique appliqué à la Terre dans le référentiel de Copernic (de bonne qualité galiléenne) donne :

$m_T \frac{d\vec{v}_T}{dt} = m_T \vec{A}_S(T)$  : L'accélération d'entraînement du référentiel géocentrique par rapport au référentiel de Copernic est celle de T dans le référentiel de Copernic et donc  $\vec{A}_S(T)$ .

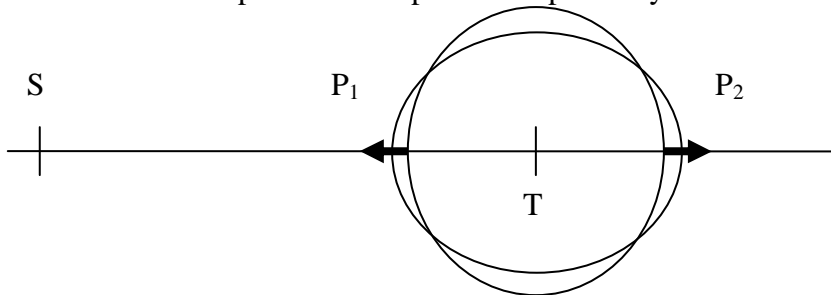
c) La relation fondamentale de la dynamique appliquée à P dans le référentiel géocentrique donne :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + m\vec{A}_T(P) + m\vec{A}_S(P) - m\vec{A}_S(T),$$

la dernière force étant la force d'entraînement (il n'y a pas de force de Coriolis car  $R_{\text{géo}}$  est en translation par rapport à  $R_{\text{Cop}}$ ). On voit apparaître dans cette relation  $\vec{A}_S(P) - \vec{A}_S(T) = \vec{A}_m(P)$  qui est le champ de marée. Finalement, on peut écrire :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + m\vec{A}_T(P) + m\vec{A}_m(P)$$

d) On représente ici les champs de marées pour deux points ayant le soleil au zénith et au nadir :



Les deux champs sont quasi opposés en P<sub>1</sub> et P<sub>2</sub>.

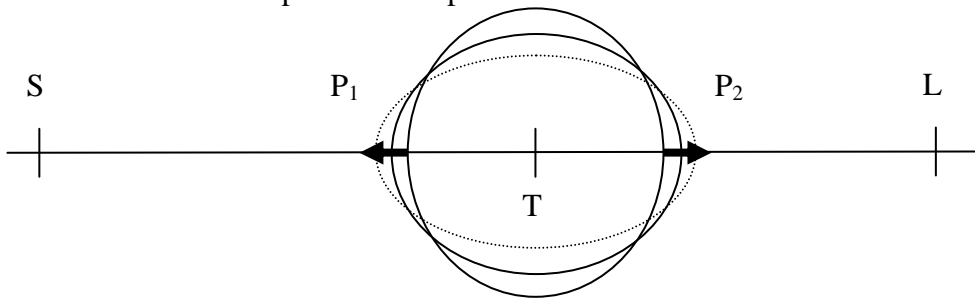
e) Ces actions provoquent la déformation représentée ci-dessus.

2) En première approximation, le bourrelet océanique, qui effectue un tour de la Terre en 24 h, soumet un point de la surface à un signal de période 12 h à cause de la symétrie du champ de marée. En réalité, il faut tenir compte du décalage des astres pendant une rotation terrestre (très sensible pour la Lune : plus de cinquante minutes de décalage par jour) et des inclinaisons des orbites et du plan équatorial).  $2T_m = 24$  h est, en première approximation, la période fondamentale du signal de marée et  $T_m$  la période de l'harmonique de rang deux mais de plus grande amplitude.

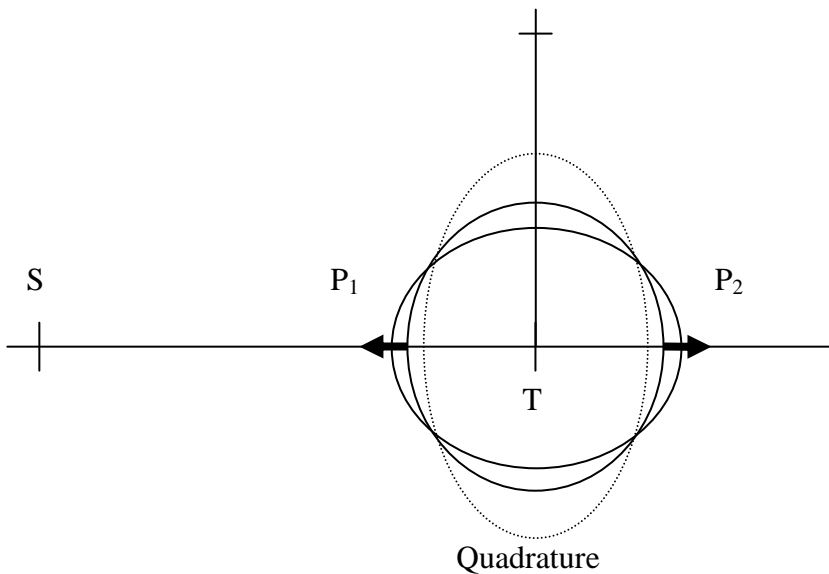
3) Conjonction et Opposition donnent les mêmes bourrelets océaniques et donc le même résultat : des marées de grande amplitude.

Au contraire, la quadrature donnant des bourrelets décalés de  $\pi/2$  donnent des marées de faible amplitude.

Les bourrelets lunaires ont été représentés en pointillés.



Opposition (même figure pour bourrelets en conjonction)



Quadrature

### C) Onde de marées

1) La propagation d'un champ électrique dans le vide conduit à la même équation d'onde.

2) A.N. :  $C = 140 \text{ m/s}$ .

La longueur d'onde associée au signal de période 12 h est  $CT = 6050 \text{ km} \gg H = 2 \text{ km}$ . On peut en conclure que le bassin est bien de faible profondeur.

3) Le temps mis par le signal de marée pour faire un aller et retour depuis Gibraltar est  $2L/C = 21400 \text{ s}$  soit environ 6 h. Il n'y a donc pas de phénomène de résonance qui se développe dans ce bassin ce qui conduit à des marées de faible amplitude.