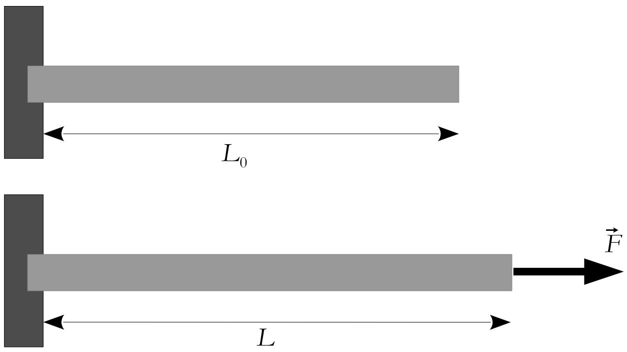
ÉTUDE THERMODYNAMIQUE D'UN FIL ÉLASTIQUE

On considère un fil élastique dont un état d'équilibre est caractérisé par sa longueur *L*, sa température absolue *T* et la norme *F* de la force de traction exercée sur le fil.



Par des mesures, on obtient son équation d'état $F=(k-AT)(L-L_0)$, où *k, A* et L_0 sont des constantes.

De plus, son énergie interne est donnée par $U=U_0+C_L(T-T_0)+\frac{1}{2}k(L-L_0)^2$ où U_0, C_L et T_0 sont des constantes.

Ces expressions n'ont de sens que lorsque le fil est étiré, donc pour $L \geq L_0$ et pour des températures absolues très inférieures à $\frac{k}{A}$.

Dans tous les états d'équilibre, les énergies cinétiques et potentielles de l'élastique sont nulles.

Le travail élémentaire reçu par le fil est $\delta W=F\,dL$, lorsque la transformation est réversible.

Données numériques

Température initiale $T_0=273\,\mathrm{K}$, longueur à vide $L_0=1\,\mathrm{m}$ exactement, raideur à température nulle $k=1{,}50\cdot10^5\,\mathrm{N.m^{-1}}$, coefficient $A=200\,\mathrm{N.m^{-1}.K^{-1}}$, capacité thermique à longueur constante $C_L=10{,}0\,\mathrm{J.K^{-1}}$.

1. Coefficients de dilatation
   a) On définit le coefficient de dilatation à force constante par $\lambda=\frac{1}{L_0}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_F$ et le coefficient d'allongement à température constante par $\mu=\frac{1}{L_0}\left(\frac{\partial L}{\partial F}\right)_T$.

      Exprimer λ et μ en fonction des variables *L* et *T*, et des constantes.

   b) Applications numériques pour $L=L_0+\Delta L$ avec $\Delta L=1{,}0\,\mathrm{cm}$, à la température initiale T_0.

      Interpréter physiquement en rédigeant.

2. Travail dans les transformations courantes
   a) Calculer le travail reçu W_L lors d'une transformation à longueur constante, ...
   b) ... puis W_F reçu à force constante F_0, lorsque la longueur varie de L_i à L_f.
   c) On considère une transformation isotherme réversible, à la température T, l'élastique étant détendu à l'état initial et sa longueur étant notée *L* à l'état final.

i. Exprimer le travail reçu W_T en fonction des constantes et des variables d'état (T, L), puis en fonction des variables (F, L).

ii. En déduire, en fonction de *L* et des constantes, le transfert thermique Q_T reçu par le fil lors de cette transformation isotherme, lorsqu'on l'effectue à la température T_0.

Application numérique pour $L=L_0+\Delta L$ avec toujours $\Delta L=1{,}0\,\mathrm{cm}$.

3. Diagramme (F, L)

On représente un état d'équilibre du fil par un point dans le plan, dont l'abscisse est la longueur *L* du fil, et l'ordonnée la force *F* exercée sur le fil.

On procède à une transformation cyclique sur le fil élastique $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$, telle que :

* En *A*, le fil est détendu et sa température est $T_1 > T_0$;

* La transformation $A \rightarrow B$ est une isotherme réversible à la température T_1 jusqu'à la longueur $L_0+\Delta L$;

* La transformation $B \rightarrow C$ est un refroidissement jusqu'à T_0, à longueur constante ;

* La transformation $C \rightarrow D$ est une isotherme réversible à la température T_0 jusqu'à la longueur initiale.

* La transformation $D \rightarrow A$ est un réchauffement jusqu'à T_1, à longueur constante ;

a) Sans chercher à respecter les échelles (en pratique $\Delta L \ll L_0$, et T_1 ne peut pas être très élevée), tracer le cycle suivi par le fil élastique dans le diagramme (F, L) en indiquant sur le cycle la position des états A, B, C, D.
On justifiera avec soin tous les tracés.

b) Sans chercher à obtenir ce résultat, expliquer avec soin comment on pourrait obtenir, **graphiquement**, le travail reçu par l'élastique à chaque cycle. On justifiera à partir de l'expression du travail élémentaire.

c) Justifier qu'on a ainsi réalisé un moteur, c'est-à-dire que le fil fournit à chaque cycle du travail à l'extérieur.

Que peut-on dire du transfert thermique reçu par le fil à chaque cycle ?

4. Capacités thermiques

a) Justifier par un calcul que la constante C_L est effectivement la capacité thermique du fil à longueur constante.

b) On définit la fonction d'état $J=U-FL$

i. Démontrer que pour toutes les transformations du fil à force constante, on obtient $\Delta J=Q$.

ii. On a donc $C_F=\left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_F$, capacité thermique à force constante.

Démontrer que $C_F=C_L+\frac{A^2 T F^2}{(k-AT)^3}$.

iii. Calculer la différence entre les deux capacités thermiques pour $L=L_0+\Delta L$ et $T=T_0$; conclure.