

TD 28 – ONDES, QUANTIQUE

1. Détection du monoxyde de carbone dans l'atmosphère

```

from math
import pi
σ = 2170 #cm-1
# donc
λ = 1/σ # cm
λm = λ/100 #m
k=2*pi/λm
c = 3e8 # m/s
T = λm/c
f = 1/T
ω = 2*pi*f
    
```

```

>>> λm
4.608294930875576e-06
>>> k
1363451.2116579702
>>> T
1.5360983102918587e-14
>>> f
65100000000000.0
>>> ω
409035363497391.06
    
```

2. Phase à l'origine des dates

	50 D		
	1500 c		
	100 f		
	0,033333333 τ		
	-6,66666667 φ_M/π		On utilise $\varphi = \omega(-\tau)$
	-0,66666667 φ_M/π		Modulo 2
	-120 Φ_M (°)		

Solution plus simple pour le déphasage : à partir de l'équation de l'onde $s = S \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$, et $\varphi_0 = 0$ d'après l'énoncé, on calcule la phase à l'origine des dates ($t=0$) en M avec $-kx = -2\pi D/\lambda = -2\pi Df/c$

3. Loi de la réfraction de Snell-Descartes

$A_1 I = \lambda_1$
 $J A_2 = \lambda_2$

$$\begin{cases} IJ \sin i_1 = \lambda_1 = v_1 \cdot T = \frac{cT}{n_1} \\ IJ \sin i_2 = \lambda_2 = v_2 \cdot T = \frac{cT}{n_2} \end{cases}$$

Maths : angles retrouvés par le théorème des couples de demi-droites perpendiculaires

$$\frac{\sin i_1}{\lambda_1} = \frac{\sin i_2}{\lambda_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{cT} (n_1 \sin i_1) = \frac{1}{cT} (n_2 \sin i_2)$$

4. Ondes dans un plasma

a) C'est positif à gauche, et k doit pouvoir être calculé : il faut donc que $\omega^2 - \omega_p^2 > 0$ (pas nul sinon, $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ serait infinie), donc que $\omega > \omega_p$

b) $c = \frac{\omega}{k}$, relation de dispersion, équivalente à la relation fondamentale des OPH $\lambda = cT$,

donc, en divisant la relation par k : $c_0^2 = c^2 - \frac{\omega_p^2}{k^2}$, où l'on doit remplacer $1/k^2$, donc

$$c_0^2 = c^2 - \omega_p^2 \frac{c_0^2}{\omega^2 - \omega_p^2} : c^2 = c_0^2 + \omega_p^2 \frac{c_0^2}{\omega^2 - \omega_p^2} \text{ soit } c = c_0 \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}, \text{ fonction qui tend vers } +\infty$$

quand $\omega \rightarrow \omega_{p,+}$ (toujours déterminer le domaine de définition avant de chercher les

limites), et puisque $c = c_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$ (on lève l'indétermination), qui tend vers $c_{0,+}$ quand

$\omega \rightarrow +\infty$.

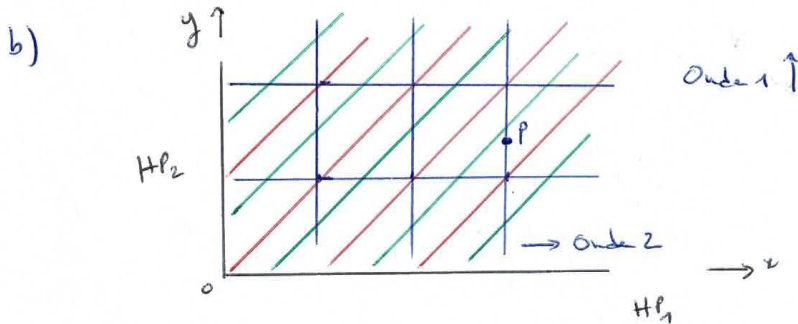
C'est une composée de fonctions décroissantes ($1/x^2$), décroissante (-), croissante (racine), décroissante ($1/x$) : inutile de dériver, elle est donc strictement décroissante.

Cela semble en contradiction avec les théories d'un obscur physicien d'origine allemande concernant la célérité de la lumière comme max possible pour les diverses vitesses...

c) $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c_0^2$, donc $\frac{d\omega^2}{dk} = 2\omega \frac{d\omega}{dk} = 2kc_0^2$: $v = \frac{kc_0^2}{\omega} = \frac{c_0^2}{\omega} \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c_0} = c_0 \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega}$, toujours strictement inférieure à c_0 (courbe inverse de la précédente, au facteur c_0 près).

5. Haut parleurs linéaires

HP linéaires a) $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$ donc $\lambda = \frac{c}{f} = 1,7 \text{ cm}$



La ddcm est nulle sur la première bissectrice : pour $M(x, y)$,
 sa distance à HP₁ est y , elle à HP₂ est x ; $\delta = 0 \Leftrightarrow x = y$

c) On doit avoir $\delta \equiv 0 [\lambda]$ pour interf. constructives car les phases aux sources sont les mêmes (nulles ici)
 $\delta \equiv \frac{\lambda}{2} [\lambda]$ pour interf. destructives

d) $\begin{cases} x_p = 5,10 \text{ cm} = 3,0 \lambda \\ y_p = 3,40 \text{ cm} = 1,41 \lambda \end{cases}$

Les ondes peuvent s'écrire $\Delta_m = p \cos(\omega t - k \frac{x}{y})$ car leur phase à l'origine des dates est nulle aux sources.

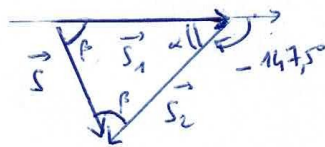
donc $\begin{cases} \varphi_2 = -kx = -\frac{2\pi}{\lambda} \times 3,0 \lambda \equiv 0 [2\pi] \\ \varphi_1 = -ky = -\frac{2\pi}{\lambda} \times 1,41 \lambda \equiv -0,41 \times 2\pi [2\pi] \equiv -2,58 [2\pi] \end{cases}$

ou encore $\begin{cases} \varphi_2 \equiv 0^\circ [360^\circ] \\ \varphi_1 \equiv -147,5^\circ [360^\circ] \end{cases}$

Triangle isocèle! $\alpha = \pi - 3,58$

$S = 2p \sin \frac{\alpha}{2} = 1,66 \text{ Pa}$
 et $2\beta + \alpha = \pi$ (somme des angles d'un triangle)

puit $\beta = \frac{\pi - \alpha}{2} = -\frac{\varphi_1}{2}$
 $\varphi_s = -\beta = \frac{\varphi_1}{2} = -1,29 \text{ rad}$
 $= -73,8^\circ$



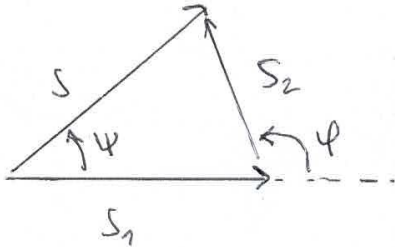
6. Interférences sans effet ?

Interf sans effet:

1. • On écrit en complexes $S e^{j\psi} = S_1 + S_2 e^{j\psi}$
 donc $S_2 e^{j\psi} = S (e^{j\psi} - 1)$, ce qui donne $S_2 = S |e^{j\psi} - 1|$,
 puis $S_2 = S \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \psi}$

• L'égalité des complexes donne $\cos \psi = 1 + \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \psi} \cdot \cos \varphi$
 donc $\cos \varphi = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \psi}{2}}$, en élevant au carré,
 et $\sin \psi = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \psi} \sin \varphi \Leftrightarrow \sin \varphi = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \psi}{2}}$

2.



Triangle isocèle donc

$$\psi + 2(\pi - \varphi) = \pi \Leftrightarrow \psi = 2\varphi - \pi$$

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \cos(2\varphi - \pi) = -\cos 2\varphi \\ &= \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi = 1 - 2\cos^2 \varphi \\ &= 2\sin^2 \varphi - 1 \end{aligned}$$

7. Tension d'une corde

Tension corde

a) 1^{er} harmonique, donc un seul ventre

Sys: M Ref: Terre, gal

Bdf: \vec{P} , \vec{F} Contrainte: immobilité

donc RFD: $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow F = P = Mg$

on en déduit que $c = \sqrt{\frac{Mg}{\mu}}$

1 seul ventre $L = \frac{\lambda}{2}$ avec $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \Rightarrow 2Lf = \sqrt{\frac{Mg}{\mu}}$

$$\text{donc } \boxed{M = \frac{\mu}{g} (2Lf)^2} = \frac{0,1}{10} (1 \times 80)^2 = \underline{64 \text{ kg.}}$$

b) $\underline{m_{\text{Corde}} = \mu L = 50 \text{ g}} \ll 64 \text{ kg} = M$



8. Instrument à vent

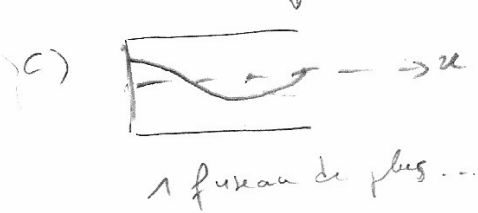
$$m \ll M$$



$$\frac{1}{4} \text{ fuseau : } L = \frac{\lambda}{4}$$

Courbe de $p(x)$ à une date donnée

b) $L = \frac{c}{4f_1} = 4,13 \text{ m}$: grand mais cohérent.



$$L = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2}, \text{ qu'on généralise}$$

$$\text{par } L = \frac{\lambda}{4} + p \frac{\lambda}{2}, p \in \mathbb{N}^*$$

($L > 0$, ainsi que λ)

Mais ici, on doit avoir $\frac{\lambda}{4}$ pour $n=1$, alors qu'on l'obtient pour $p=0$: $n=p+1$

$$L = \frac{\lambda}{4} + (n-1) \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4} [1 + 2(n-1)]$$

$$= \frac{\lambda}{4} (2n-1)$$

d)e) $\lambda = cT = \frac{c}{f}$: $f = \frac{c}{\lambda}$ donc $f_n = \frac{c}{4L} (2n-1)$, multiple impair de $\frac{c}{4L}$.

9. Trous d'Young

1. Diffraction de l'onde par chacune des fentes. \odot
2. On pourra faire l'approximation des petits angles.
3. Par symétrie, les ondes ont les mêmes en o' : addition constructive donc frange brillante.

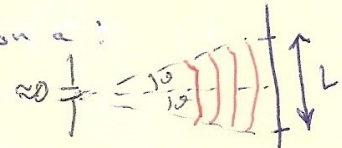
\odot On a $\sin \theta = k \frac{\lambda}{d}$: $\theta = \frac{\lambda}{d}$

\swarrow du premier minimum \rightarrow largeur fente
 \searrow 1 période fente

Par ailleurs, on lit la largeur du champ visible d'interférences $L \approx 2,0$ cm (entre 1,6 cm et 3,6 cm, absises des zéros (pas de lumière)).

En supposant a petit devant d , on a :

$$\theta = \frac{L/2}{D} \quad \text{demi largeur}$$



$$\text{donc } \frac{2D}{L} = \frac{d}{\lambda} : d = \frac{2D\lambda}{L} = 7,6 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 75 \mu\text{m.} \quad (\text{c'est approché...})$$

4. a. $S = S_2M - S_1M$

avec $S_2M = \sqrt{|S_2M|^2}$ et $\vec{S}_2M = \vec{S}_2O + \vec{O'O} + \vec{OM} = \begin{pmatrix} x_M + a \\ D \end{pmatrix}$

$$\text{donc } S = \sqrt{(x_M + a)^2 + D^2} - \sqrt{(x_M - a)^2 + D^2}$$

b. $S_2M = D \sqrt{1 + \left(\frac{x_M + a}{D}\right)^2} \approx D \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_M + a}{D}\right)^2 \right]$ car $a, x_M \ll D$

$- S_1M \approx D \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_M - a}{D}\right)^2 \right]$

$$S = \frac{D}{2D^2} \cdot \left[\underbrace{(x_M + a)^2}_{4a x_M} - (x_M - a)^2 \right] : S = \frac{2a}{D} x_M$$

c. $\varphi_2 = \varphi_{20} - k S_2M$

$\varphi_1 = \varphi_{10} - k S_1M$

\uparrow
à la source
= avec fentes

$$\begin{aligned} \varphi_{21} &= -k S = -\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{2a}{D} x_M \\ &= -\frac{4\pi a}{\lambda D} x_M \end{aligned}$$

Max: frange brillante : $\varphi_{2/1} \equiv 0 [2\pi]$

donc $\frac{4\pi a x_M}{\lambda D} = 2p\pi, p \in \mathbb{Z}$

$x_M = p \cdot \left(\frac{\lambda D}{2a}\right)$, régulièrement espacés
(multiples de $\frac{\lambda D}{2a}$).

interfrange $\Delta x_{pe} = i = \frac{\lambda D}{a}$
↓
distance entre fentes.

Min: frange sombre : $\varphi_{2/1} \equiv \pi [2\pi]$

donc entre les deux : $x_M = \left(p + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda D}{2a}$ même i bien sûr.

4. Il y a 4 interfranges entre les fentes

sombres situées à 2,2cm et 3,2cm : $i = 0,25\text{cm}$

$$2a = \frac{\lambda D}{i} = 3,0 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 300 \mu\text{m}.$$

Photons radio

Pendant $\Delta t = 1s$, l'émetteur délivre l'énergie $E = p \Delta t = 100 kJ$.

Chaque photon émis a pour énergie $e_{\text{phot}} = \hbar \omega = \hbar 2\pi f$
 $= 6,63 \cdot 10^{-26} J$

Or $E = N e_{\text{phot}}$; $N = 1,51 \cdot 10^{30}$

La discrétisation de l'énergie est peu perceptible dans le domaine radio.

Raie d'émission

L'écart énergétique est l'énergie du photon émis

$$\text{donc } E = \hbar \omega = 2\pi \hbar f = \frac{2\pi \hbar c}{\lambda_0}$$

$$\text{ce qui donne } \lambda_0 = \frac{2\pi \hbar c}{E} = \frac{2\pi \times 1,0 \cdot 10^{-34} \times 3,0 \cdot 10^8}{2,88 \times 1,6 \cdot 10^{-13}} = \underline{518 \text{ nm}}$$

λ_{dB} a) On parle bien sûr d'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ avec $p = m v$

$$\text{donc } E_c = \frac{p^2}{2m} \quad ; \quad \text{or } p = \hbar k = \frac{2\pi \hbar}{\lambda_{dB}}$$

$$\text{soit } \boxed{E_c = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{m \lambda_{dB}^2}} = \underline{1,97 \cdot 10^{-17} J} = \underline{123,4 eV}$$

b) $\lambda_{dB} = \pi \hbar \sqrt{\frac{2}{m E_c}}$, en inversant l'expression précédente.

$$\text{A.N. } e : m_e \approx 10^{-30} \text{ kg} : \lambda_{dB} = 0,11 \text{ nm}$$

p :

$$\lambda_{dB} = 3,12 \text{ pm} \quad (10^{-12} \text{ m})$$

13. Fonction d'onde d'une particule dans un puits de potentiel infini

ψ puits infini

a) ψ est continue partout et vaut 0 pour $x < 0$ et $x > L$,
car ces zones sont interdites ; aucune chance d'y trouver la particule.
 ψ est donc une "onde" stationnaire, avec 2 nœuds au
moins : en 0 et en L.

L'expérience donne directement que $\psi(0, t) = 0, \forall t$;

de plus, $\psi(L, t) = 0 \forall t \Rightarrow \sin(kL) = 0$

$$\Rightarrow kL \equiv 0[\pi]$$

$$\Rightarrow k = n \frac{\pi}{L}$$

b) La probabilité de trouver la particule sur le segment
est $\beta = \int_{\text{segment}} d\beta = \int_0^L |\psi|^2 dx$; or, la particule est

nécessairement dessus : $\beta = 1$.

$|\psi| = A |\sin(kx)|$, car $A > 0$ et $|\psi|^2 = A^2 \sin^2(kx)$

qu'il faut linéariser pour obtenir une primitive.

$$\sin^2 \alpha = \left(\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{i2\alpha} + e^{-i2\alpha} - 2}{-4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\alpha)$$

$$\text{Donc } \int_0^L \sin^2(kx) dx = \frac{1}{k} \int_0^L \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2kx) \right] dx$$

$$= \frac{L}{2} - \frac{1}{4k} \left[\sin(2kx) \right]_0^L$$

$$= \frac{L}{2} - \frac{1}{4k} \left[\sin\left(\frac{2n\pi}{L} \cdot L\right) - \sin(0) \right] = \frac{L}{2}$$

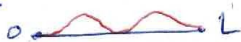
$$\text{bit } A^2 \frac{L}{2} = 1 \text{ donc } A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

c) $n=1$



Contrairement au cas classique, la particule
a beaucoup moins de chances de se retrouver
aux bords du domaine (la loi de proba écrit
uniforme en classique, car $v = \text{cte}$).

$n=2$



C'est plus étrange encore ! la particule évite
le milieu du segment, alors qu'il n'y a aucune
force !