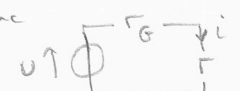


TD 29 – Induction

ASPECTS PUREMENT ÉLECTRIQUES

1. Solénoïde et spire

1. Il faut trouver d'abord le courant qui traverse le solénoïde pour pouvoir calculer le champ.
 Comme on est en régime établi, $L \Leftrightarrow \text{---}$, je
 donc

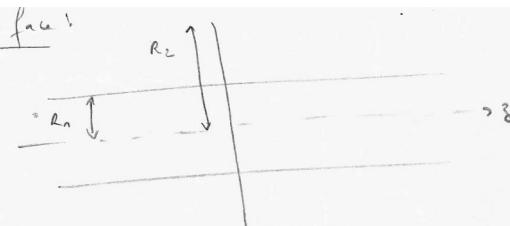


$$i = \frac{U}{R_G + R} = 3,75 \text{ A}$$

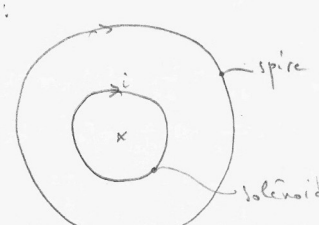
On a $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$, avec \vec{u}_z en accord avec le sens de l'enroulement

$$B = 4,71 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

Vue de face :



Vue de côté :



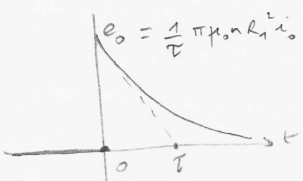
Le flux dans la spire est $\vec{B} \cdot \vec{S}$, mais \vec{B} n'est nul qu'à l'intérieur du solénoïde : à l'extérieur, \vec{B} vaut $\vec{0}$.
 Le vecteur surface et \vec{B} sont tous deux selon \vec{u}_z , donc

$$\Phi = B \cdot \pi R_1^2 \quad (\text{et non pas } \pi R_2^2)$$

soit $\Phi = \pi \mu_0 n R_1^2 i$

2. $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ (Faraday), en convention récepteur, avec $i_0 = i_0 e^{-t/\tau}$

3. $e = -\pi \mu_0 n R_1^2 \frac{d}{dt} (i_0 e^{-t/\tau})$
 $e = + \frac{\pi \mu_0 n R_1^2 i_0}{L} e^{-t/\tau}$, qui varie donc brutalement ;

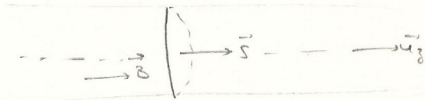


$$e_0 = \frac{1}{L} \pi \mu_0 n R_1^2 i_0$$

2. Autoinductance d'un solénoïde

$$a) \vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z \\ = \mu_0 \frac{N}{D} i \vec{u}_z$$

b) φ , flux de \vec{B} dans une spire, plane + champ uniforme est donc
 $\varphi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ avec \vec{B} et \vec{S} colinéaires de même sens



$$\varphi = \pi R^2 B = \pi \mu_0 \frac{N}{D} R^2 i \\$$

Il y a N spires donc $\Phi = N\varphi$ et puisque
 $\Phi = Li : L = \pi \mu_0 \frac{N^2}{D} R^2$

Valeurs réalistes ?

On veut $L = 0,1 \text{ H}$ avec $L = \pi \mu_0 \frac{R^2}{D} N^2$

$$\Leftrightarrow N = \sqrt{\frac{DL}{\pi \mu_0 R^2}}$$

Essayons $\begin{cases} D = 10 \text{ cm} \\ R = 2 \text{ cm} \end{cases}$

$\rightarrow N = 4460$ spires : un peu trop, même avec plusieurs couches.

\rightarrow Pour diminuer N , on peut

* diminuer D

* augmenter R

mais le modèle du solénoïde infini (bobine très longue) n'est alors plus très valable...

$0,1 \text{ H}$ est une valeur assez élevée

(TP $L \approx 50 \text{ mH} = 0,05 \text{ H}$)

3. Circuit électrique carré

Voir le cours pour le début : on a $\Phi(\vec{B}) = B_0 a^2 \cos(\omega t)$; la seule différence est le circuit de base qui contient maintenant L et r .

Donc $e_{\text{IND}} = r i + L \frac{di}{dt}$, avec $e_{\text{IND}} = -\frac{d\Phi}{dt}$, sinusoïdale : on doit donc passer dans les complexes, et ce n'est pas idiot de faire la dérivation temporelle seulement après ce passage (sinon sin apparaît par dérivation, et il faut le transformer en cos avec $\sin \alpha = \cos(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha - \pi/2)$ pour obtenir rigoureusement l'argument de la grandeur cherchée) : $e_{\text{IND}} = r i + L \frac{di}{dt}$, donc

$$-j\omega B_0 a^2 \exp(j\omega t) = (r + j\omega L) i(t) \text{ et } i(t) = -\frac{j\omega B_0 a^2}{r + j\omega L} \exp(j\omega t).$$

\uparrow

$-d/dt$

On traduit ce résultat par $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$, avec $I_m = \frac{\omega B_0 a^2}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}}$ (module) et

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{\omega L}{r}\right) \text{ (argument en oubliant le } \omega t \text{)}.$$

Remarque : L est définie par $L = \frac{\Phi_{1 \rightarrow 1}}{i}$, et prend en compte le champ magnétique créé par le circuit lui-même lorsqu'il est parcouru par le courant induit.

Ce champ est très faible, comme l'autoinductance L du circuit, puisque le circuit est constitué d'une spire unique : une bobine usuelle comporte en effet plusieurs centaines de spires.

30.7 Table à induction (d'après CCP)

$$1. \begin{cases} v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} v_1 = (R_1 + iL_1\omega) i_1 + iM\omega i_2 \\ 0 = (R_2 + iL_2\omega) i_2 + iM\omega i_1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \frac{I_2}{I_1} = -\frac{iM\omega}{R_2 + iL_2\omega}.$$

$$3. v_1 = (R_1 + iL_1\omega) i_1 + iM\omega \left(-\frac{iM\omega}{R_2 + iL_2\omega} i_1 \right), \text{ donc } Z_e = R_1 + iL_1\omega + \frac{(M\omega)^2}{R_2 + iL_2\omega}.$$

$$4. \begin{cases} R_1 \ll L_1\omega \\ R_2 \ll L_2\omega \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \frac{I_2}{I_1} = -\frac{M}{L_2} \\ Z_e = iL_1\omega \left(1 - \frac{M^2}{L_1L_2} \right) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \frac{I_2}{I_1} = -8,3 \\ |Z_e| = 4,2 \text{ m}\Omega \text{ pour } f = 50 \text{ Hz} \end{cases}$$

5. Le champ magnétique, créé par l'inducteur et vu par la plaque, diminue lorsqu'on éloigne la plaque. Le flux de \vec{B} à travers la plaque diminue et donc M diminue. Alors Z_e augmente et, pour une même tension d'alimentation, le courant décroît.

ASPECTS MÉCANIQUES (ET ÉLECTRIQUES)

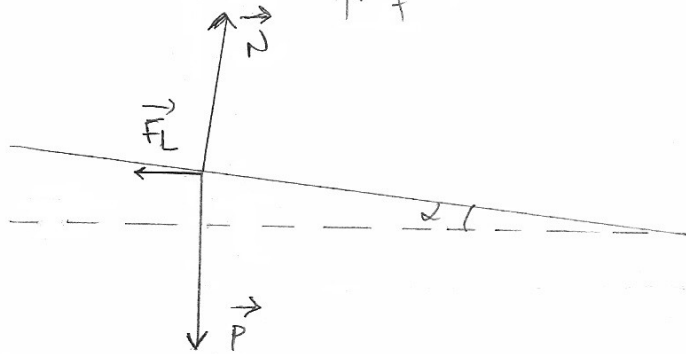
5. Équilibre d'un rail de Laplace

a) La résistance du circuit étant égale à R , il circule une intensité $i = \frac{e}{R}$, qui conduit à l'apparition d'une force de Laplace.

$$\vec{F}_L = i \vec{MN} \wedge \vec{B} \quad (\vec{B} \text{ uniforme sur un conducteur filiforme})$$

D'après la règle des 3 doigts, elle est horizontale, dirigée vers la gauche, avec $F_{MN} = i a B$, puisque $\vec{MN} \perp \vec{B}$.

Voici la situation vue de profil



$$\vec{RFD} \text{ à l'équilibre : } \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_L = \vec{0}$$

qu'on projette sur l'axe incliné pour éliminer \vec{N} :

$$-F_L \cos \alpha + P \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 0$$

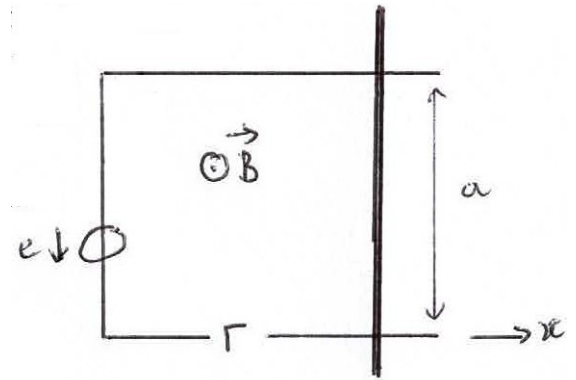
$$\text{On en déduit } e = \frac{mgR}{aB} \tan \alpha = 1,73V$$

6. Rails de Laplace en fonctionnement moteur

1. Voir cours : le sens de e impose celui de i puis celui du vecteur surface : le flux du champ est positif.

L'étude électrique donne $e + e_{\text{IND}} = Ri$ avec $\Phi = Bs = Ba x$ puis $e - Bav = Ri$ avec la loi de Faraday.

La seule force horizontale est la force de Laplace, d'où l'équation mécanique $m \dot{v} = +Bai$ (sens avec les 3 doigts par exemple).



2. On passe en complexe, avec les amplitudes complexes :

$E - Ba \underline{V} = RI$ et $m j \omega \underline{V} = Ba \underline{I}$, système de deux équations à 2 inconnues, que l'on résout :

$$E - \frac{B^2 a^2}{j \omega m} \underline{I} = RI \text{ et finalement } \underline{I} = \frac{j \omega m}{B^2 a^2 + j \omega m R} E \text{ (éliminer les dénominateurs lors$$

des calculs), puis } \underline{I} = \frac{\omega m}{\sqrt{B^4 a^4 + \omega^2 m^2 R^2}} E = \frac{1}{\sqrt{R^2 + [(Ba)^2 / (\omega m)]^2}} E = \frac{1}{\sqrt{1 + [(Ba)^2 / (\omega m R)]^2}} \frac{E}{R}

(forme facultative, avec un petit dénominateur, mais intéressante pour comparer) : on remarque que l'amplitude du courant est plus faible que celle obtenue en l'absence d'induction : E/R

Pour la position, on détermine \underline{V} , puis \underline{X} avec $\underline{V} = j \omega \underline{X}$.

Comme on ne cherche que le module, on obtient $X_m = |\underline{X}| = \frac{1}{\sqrt{1 + [(Ba)^2 / (\omega m R)]^2}} \frac{Ba E}{\omega^2 m R}$ à partir de l'équation mécanique dans les complexes.

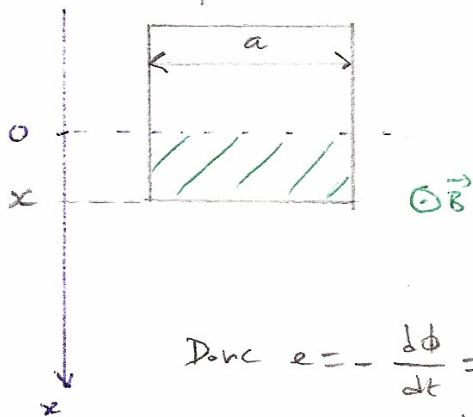
7. Rails de Laplace en fonctionnement générateur

À vous...

8.

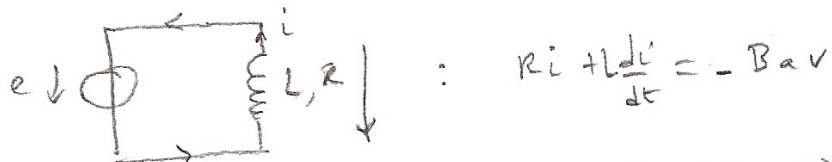
CADRE QUI CHUTE

1. Chute libre : que le poids, donc $\vec{a} = \vec{g}$: $\frac{dv}{dt} = g$ (axe x vers le bas)
2. Il faut faire un schéma rigoureux : on repère la position du côté bas par x , et on ne prend pas $x = \frac{a}{2}$.



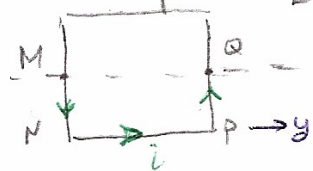
(ÉÉ) : Φ varie car S varie
 $S = ax$ et $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$
 $= Bax$
 en prenant \vec{S} de même sens que $\vec{B} \Rightarrow$ à sens trigo

Donc $e = - \frac{d\Phi}{dt} = -Bav$ dans le circuit équivalent



(ÉM) : Bdf : Poids \vec{P} ; Force de Laplace $\vec{F}_L = i \vec{MN} \wedge \vec{B} + i \vec{NP} \wedge \vec{B} + i \vec{PQ} \wedge \vec{B}$

Choix de y pour que (x, y, z) direct.



car $\vec{MN} = -\vec{PQ}$

$$\vec{F}_L = i \vec{NP} \wedge \vec{B} = i \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = iaB \vec{u}_x$$

donc $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_L$ (RFD).

Sur (Ox) : $m \frac{dv}{dt} = +mg + iaB$ (ÉM)

Il faut éliminer i entre les deux équations :

$$R \left(\frac{m}{Ba} \frac{dv}{dt} - \frac{mg}{Ba} \right) + L \frac{m}{Ba} \frac{d^2v}{dt^2} = -Bav$$

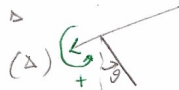
$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{B^2 a^2}{mL} v = \frac{R}{L} g$$

3. On aura encore $\frac{dv}{dt} = g$ car la somme des forces de Laplace est nulle.

9. Cadre oscillant

CADRE OSCILLANT

1. L'orientation choisie pour θ impose celle de Δ



2. (ÉÉ)? On oriente arbitrairement à dans le sens trigo, donc, une



Le flux magnétique $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$
(\vec{B} uniforme sur surface \vec{S} plane)

de pend de θ : $\Phi = B \cdot S \cdot \cos(\vec{S}, \vec{B})$

$$= B \cdot S \cdot \cos\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right]$$

$$= B a b \sin \theta$$

$$\text{donc } e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$$e = R \dot{\theta} = -B a b \dot{\theta} \cos \theta$$

(EM) : Syst: cadre; moment J, masse m Rép: Lolo, guidon

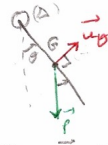
Contrainte: cadre en RAF

<u>BdF et moments</u>	Forces \rightarrow Moments \odot Couple	
Poids \vec{P}	$\rightarrow M_{\Delta}(\vec{P})$	x
Reaction axe	$\rightarrow 0$ (couple axe)	x
Laplace	$\rightarrow M_{\Delta}(\vec{F}_L)$	x

Moment du poids? s'applique en G, au centre du cadre

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = P_{\theta} \cdot r_G = \frac{a}{2} \cdot P \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= - \frac{m g a}{2} \sin \theta$$



Moment (couple) de Laplace? $d\vec{b} = i \vec{S} \wedge \vec{B}$, puis $M_{\Delta}(\vec{F}_L) = d\vec{b} \cdot \vec{u}_{\Delta}$

qui donne $d\vec{b} = i S B \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \vec{u}_{\Delta}$ (puisque $(\vec{S}, \vec{B}) = \frac{\pi}{2} - \theta$)

$$M_{\Delta}(\vec{F}_L) = i S B \cos \theta$$

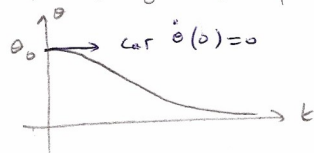
$$(TMC_{\Delta}) : \frac{dL_{\Delta}}{dt} = \sum M_{\Delta} : J \ddot{\theta} = - \frac{m g a}{2} \sin \theta + \frac{B^2 a^2 b^2}{R} \dot{\theta} \cos^2 \theta$$

$$\text{Petits angles: } \sin \theta \approx \theta \text{ et } \cos \theta \approx 1 : \ddot{\theta} + \frac{B^2 a^2 b^2}{R J} \dot{\theta} + \frac{m g a}{2 J} \theta = 0$$

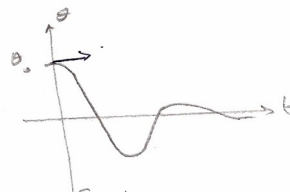
3. Par identification $\ddot{\theta} + 2\lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$, on a

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m g a}{2 J}} \text{ et } \lambda = \frac{(B a b)^2}{2 R J}$$

\rightarrow si $\lambda > \omega_0$, régime aperiodique (critique si e' egalite)



\rightarrow si $\lambda < \omega_0$, régime pseudo-periodique:



C'est la force de Laplace qui amortit le mouvement, même sans frottements mécaniques.