Dérivée, différentielle, développements limités

1 Dérivée

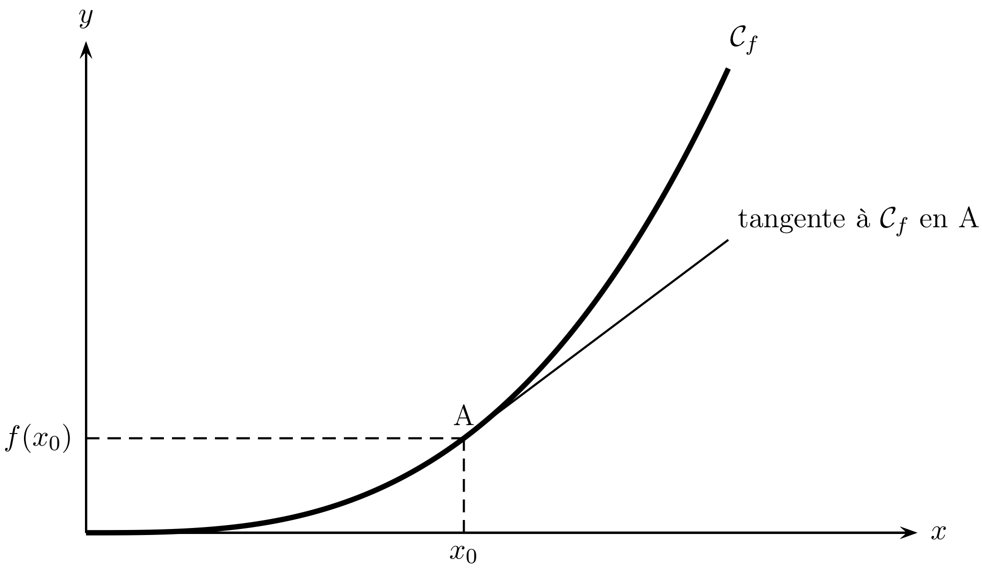
1.1 Nombre dérivé

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction $f : x \longmapsto f(x)$. La fonction f est dérivable en x_0 s'il existe un réel $f'(x_0)$, appelé **nombre dérivé** de f en x_0, tel que :

$$\boxed{f'(x_0) \triangleq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \tag{1}$$

Notons que les deux expressions sont équivalentes à condition de poser $\Delta x = x - x_0$. Le nombre dérivé $f'(x_0)$ représente la pente de la tangente du graphe $\mathcal{C}_f$ de f au point A $(x_0, f(x_0))$. Une équation de cette tangente est alors donnée par [1]

$$y_{\mathrm{t}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{2}$$



1.2 Fonction dérivée

Si une fonction f est dérivable en tout point d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I. On appelle alors **fonction dérivée** de f, notée f', la fonction qui, à tout réel x de I, associe le nombre dérivé de f en x : $f' : I \longmapsto \mathbb{R}$ telle que $f' : x \longmapsto f(x)$. On retiendra les dérivées usuelles suivantes :

fonction f	dérivée f'
$k \in \mathbb{R}$	0
$x^n, n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}
$\ln x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$

fonction f	dérivée f'
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$

1. En effet, par définition du coefficient directeur d'une graphe d'une fonction affine : $f'(x_0) = \dfrac{y_{\mathrm{t}}(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

1.3 Approximation linéaire d'une fonction

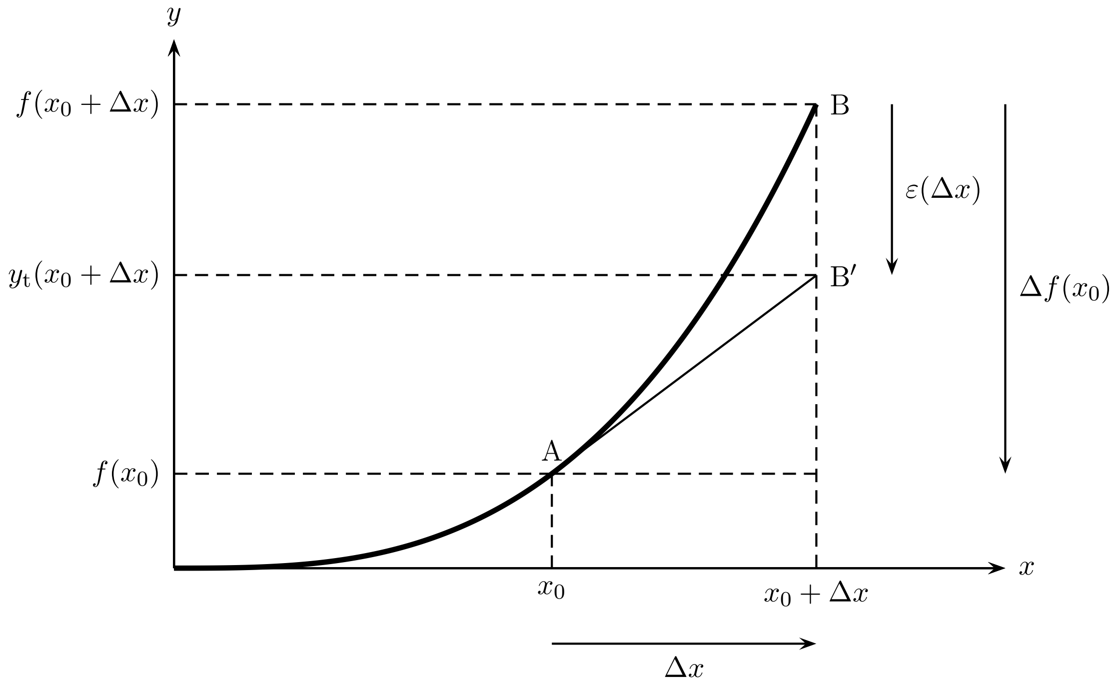
La relation 1 permet d'écrire qu'il existe une fonction $\varepsilon : \Delta x \longmapsto \varepsilon(\Delta x)$, de limite 0 quand Δx tend vers 0, telle que[2] :

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x) \tag{3}$$

Pour interpréter graphiquement cette relation, on identifie les expressions 2 et 3 avec $\Delta x = x - x_0$:

$$y_{\mathrm{t}}(x_0 + \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) + \varepsilon(\Delta x)$$

Ainsi, en un point d'abscisse $x_0 + \Delta x$, l'ordonnée $y_{\mathrm{t}}(x_0 + \Delta x)$ d'un point B′ de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A $(x_0, f(x_0))$ s'approche d'autant plus de l'ordonnée $f(x_0 + \Delta x)$ d'un point B de $\mathcal{C}_f$ que Δx est petit.



En pratique, on utilisera souvent en physique l'approximation suivante, associée à la relation 3, afin de simplifier des équations non linéaires en vue d'une résolution analytique :

Propriété. Une petite variation Δx de x au voisinage de x_0 entraîne une variation $\Delta f(x_0) \triangleq f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$ de f qui lui est en bonne approximation proportionnelle :

$$\Delta f(x_0) \triangleq f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \simeq f'(x_0)\Delta x \qquad \text{soit} \qquad f(x_0 + \Delta x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

où de manière équivalente, en posant $\Delta x = x - x_0$,

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Cette **approximation linéaire** est d'autant plus satisfaisante que Δx est petit.

On retiendra les approximations linéaires usuelles suivantes[3] :

fonction f	approx. lin. de f autour de $x_0 = 0$	fonction f	approx. lin. de f autour de $x_0 = 0$
$\cos x$	1	$\ln(1+x)$	x
$\sin x$	x	$\exp(x)$	$1+x$
$\tan x$	x	$(1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$1+\alpha x$

2. Pour s'en convaincre, il suffit de remplacer l'expression de $f(x_0 + \Delta x)$ fournie par 3 dans l'expression 1.
3. Pour tester la validité de ces expressions, vous pouvez vous entraîner à tracer à la calculatrice le graphe de la fonction superposé au graphe de l'approximation linéaire associée, et ce sur des intervalles de plus en plus petits autour de zéro.

1.4 Formule de Taylor et développements limités

Il peut arriver qu'une approximation linéaire ne suffise pas à caractériser de manière satisfaisante le comportement d'une fonction au voisinage d'un point. On peut alors utiliser un outil plus élaboré, le **théorème de Taylor** (cf. cours de mathématiques), pour approximer une fonction n fois dérivable au voisinage d'un point x_0 par une fonction polynomiale dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point. Plus précisément :

Formule de Taylor. Si n est un entier naturel et f une fonction n fois dérivable, définie sur un intervalle I contenant x_0, alors on peut écrire :

$$f(x) \simeq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}+f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{6}+\cdots+f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

où de manière équivalente, en posant $\Delta x = x - x_0$,

$$f(x_0+\Delta x) \simeq f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+f''(x_0)\frac{(\Delta x)^2}{2}+f'''(x_0)\cdots+\frac{(\Delta x)^3}{6}+f^{(n)}(x_0)\frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

Cette approximation est d'autant plus satisfaisante que Δx est petit.

Le choix de l'entier n où l'on décide d'arrêter ce développement, autrement dit le degré du polynôme d'approximation, détermine l'**ordre** du **développement limité**[4] (DL). Par exemple, $f(x) \simeq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)(x-x_0)^2/2$ constitue un développement à l'ordre 2. Notons que le développement à l'ordre 1, $f(x) \simeq f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)$, s'identifie à l'approximation linéaire. On retiendra en particuliers le développement limité suivant :

fonction f	DL de f à l'ordre 2 autour de $x_0 = 0$
$\cos x$	$1 - x^2/2$

2 Différentielle

2.1 Définition

Depuis les travaux de Leibniz (1675) sur le calcul différentiel, on utilise généralement la notation $\mathrm{d}x$ pour un Δx infiniment petit (tout en étant non nul). L'application $\mathrm{d}f(x_0) : \mathrm{d}x \longmapsto f'(x_0)\mathrm{d}x$ définit alors la **différentielle** de f au point x_0. En injectant l'expression $\boxed{\mathrm{d}f(x_0) \triangleq f'(x_0)\mathrm{d}x}$ dans 3, on en déduit que :

Propriété. Une variation $\mathrm{d}x$ infiniment petite de x au voisinage de x_0 entraîne, par passage à la limite, une variation $f(x_0+\mathrm{d}x)-f(x_0)$ de f qui lui est proportionnelle :

$$f(x_0+\mathrm{d}x)-f(x_0) = f'(x_0)\mathrm{d}x \triangleq \mathrm{d}f(x_0) \qquad \text{soit} \qquad f(x_0+\mathrm{d}x) = f(x_0)+\mathrm{d}f(x_0)$$

avec $\mathrm{d}f(x_0)$ la différentielle de f en x_0.

Pour une valeur de x quelconque, on généralise la notion de différentielle en écrivant :

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x \tag{4}$$

4. En toute rigueur, l'expression d'un développement limité en mathématiques contient une égalité stricte ainsi que l'expression d'un reste (cf. cours de mathématiques), mais on utilise en physique une notation simplifiée afin de ne pas alourdir les formules.

2.2 Notation différentielle de la dérivée

La **notation différentielle de la dérivée**, que nous utiliserons tout au long de l'année en physique-chimlie, s'obtient à partir de l'expression 4 :

$$\boxed{f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)} \tag{5}$$

Notons que cette notation est cohérente avec la défition 1 de la dérivée comme la limite d'un taux d'accroissement.

2.3 Remarques

❑ Intégration

On utilise fréquemment l'équivalence :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$$

pour construire l'intégrale :

$$\int_{f(x_1)}^{f(x_2)} \mathrm{d}f = \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\mathrm{d}x \qquad \text{soit} \qquad \int_{f(x_1)}^{f(x_2)} \mathrm{d}f = f(x_2) - f(x_1) \triangleq \Delta f$$

comme une somme continue de petits rectangle infinitésimaux de hauteur $f'(x)$ et de largeur $\mathrm{d}x$ pour x variant de x_1 à x_2.

❑ Dérivées successives

Par extension, on note les dérivées successives :

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x), \quad f'''(x) = \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(x), \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x)$$

Notons que, contrairement à $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, ces objets ne se manipulent pas comme des fractions. Elles constituent des expressions insécables, des symboles à part entière. Par exemple, écrire $\mathrm{d}^2 f = f''\mathrm{d}x^2$ n'aurait aucun sens.

❑ Dimension(s)

Les notations précédentes sont pratiques pour retrouver la dimension des dérivées successives (cf fiche 2 sur l'analyse et la présentation d'un résultat). Par exemple, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ a la dimension de f sur celle de x, $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ a la dimension de f sur celle de x^2, $\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}$ a la dimension de f sur celle de x^3, ...

❑ Dérivée d'une fonction composée

Pour dériver par rapport à x une fonction composée du type $x \xmapsto{u} u(x) \xmapsto{f} f(u(x))$, on peut écrire :

$$(f(u(x)))' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \times \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

et obtenir ainsi rapidement le résultat. Par exemple, pour dériver la fonction $\sin(kx + \varphi)$ par rapport à x (avec k et φ des constantes), on réécrit cette fonction sous la forme $\sin(u)$ avec $u(x) = kx + \varphi$ et on utilise la relation précédente :

$$\frac{\mathrm{d}(\sin(kx + \varphi))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(\sin(u))}{\mathrm{d}u} \times \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos(u) \times k = k\cos(kx + \varphi)$$

3 Généralisation aux fonctions de plusieurs variables

Dans tous ce paragraphe, on raisonnera pour simplifier sur une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ de deux variables $f : x, y \longmapsto f(x, y)$. On admettra que tous les résultats énoncés sont généralisables à une fonction d'un nombre quelconque de variables.

3.1 Dérivées partielles

Les dérivées partielles de f respectivement par rapport à x et y en (x_0, y_0) sont définies par :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \triangleq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \triangleq \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta t) - f(x_0, y_0)}{k}}$$

En pratique $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ représente la dérivée de f par rapport à x à y constant ; de même $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ représente la dérivée de f par rapport à y à x constant.

Considérons par exemple $f(x, y) = xy^2$; alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy$.

3.2 Approximation linéaire et différentielle

Les relations établies avec une fonction d'une variable se généralisent aux fonctions de plusieurs variables.

❑ Approximation linéaire

Pour des petites variations Δx et Δy autour de (x_0, y_0) :

$$\boxed{\Delta f(x_0, y_0) \triangleq f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x, y) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y}$$

❑ Différentielle

Pour des petites variations infiniment petites $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ autour de (x_0, y_0) :

$$\boxed{f(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y,) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\mathrm{d}y \triangleq \mathrm{d}f(x_0, y_0)}$$

Exemples :

∘ $f(x, y) = xy^2$; alors $\mathrm{d}f(x, y) = y^2\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y$

∘ $f(x, y) = kx^\alpha y^\beta$; dans ce cas, pour simplifier les calculs, il est préférable de différentier $\ln f(x, y) = \ln k + \alpha \ln x + \beta \ln y$, ce qui donne $\dfrac{\mathrm{d}f(x, y)}{f(x, y)} = \alpha \dfrac{\mathrm{d}x}{x} + \beta \dfrac{\mathrm{d}y}{y}$.