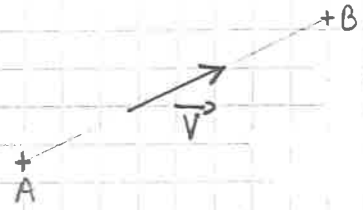
Utilisation des vecteurs en physique

I Vecteurs

- Soit un vecteur $\vec{V}$; il faut <u>3 données pour le définir</u> : <u>c'est une grandeur vectorielle</u>



$\vec{V}$ {
- sa direction : droite (AB) ici
- son sens : de A vers B ici
- sa <u>norme</u> ou valeur ou intensité : $\|\vec{V}\|$ notée plus simplement V en physique, correspondant à la longueur du vecteur, <u>nombre toujours >0</u> !

- Expression d'un vecteur dans une base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ ou projection d'un vecteur dans une base

Dans un espace à 3 dimensions, tout vecteur s'écrit $\vec{V} = V_x\,\vec{e_x} + V_y\,\vec{e_y} + V_z\,\vec{e_z}$

où V_x, V_y, V_z sont les coordonnées du vecteur $\vec{V}$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$

Dans un espace à 2 dimensions (plan), $\vec{V} = V_x\,\vec{e_x} + V_y\,\vec{e_y}$

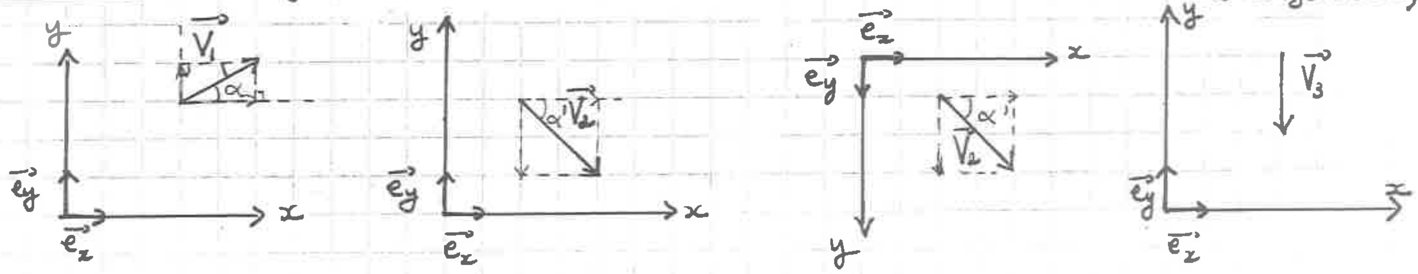
Dans un espace à 1 dimension (droite), $\vec{V} = V_x\,\vec{e_x}$

} fréquent en physique

- Coordonnées du vecteur $\vec{V}$

V_x, V_y, V_z sont des valeurs algébriques : ce sont des valeurs qui peuvent être >0 ou <0. cela dépend de l'orientation du vecteur dans la base choisie. Pour les obtenir, il faut projeter le vecteur $\vec{V}$ sur chacun des axes en tenant compte de son orientation !

<u>exemples</u> (en physique, un vecteur est souvent repéré par l'angle qu'il fait avec l'horizontale)



$\vec{V_1}$ $\begin{cases} V_{1x} = V_1 \cos\alpha > 0 \\ V_{1y} = V_1 \sin\alpha > 0 \end{cases}$

$\vec{V_2}$ $\begin{cases} V_{2x} = V_2 \cos\alpha' > 0 \\ V_{2y} = -V_2 \sin\alpha' < 0 \end{cases}$

$\vec{V_2}$ $\begin{cases} V_{2x} = V_2 \cos\alpha' > 0 \\ V_{2y} = V_2 \sin\alpha' > 0 \end{cases}$

$\vec{V_3}$ $\begin{cases} V_{3x} = 0 \\ V_{3y} = -V_3 < 0 \end{cases}$

- Lien Coordonnées – norme du vecteur

norme $\|\vec{V}\| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ (espace)

$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ (plan)

$V = \sqrt{V_x^2} = |V_x|$ (droite)

encore une fois, $\|\vec{V}\| = V > 0$!

- cas d'1 dimension (droite)

$V > 0$ (car norme ou valeur) mais V_x peut être >0 ou <0 (valeur <u>algébrique</u>)

→

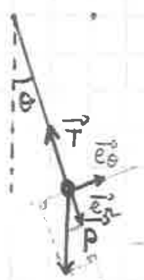
comme $\vec{V} = V_x \, \vec{e_x}$, $V_x > 0$ signifie que $\vec{V}$ est de même sens que $\vec{e_x}$

$V_x < 0$ signifie que $\vec{V}$ est de sens opposé à $\vec{e_x}$

$\left.\begin{array}{l} V = V_x \text{ si } V_x > 0 \\ V = -V_x \text{ si } V_x < 0 \end{array}\right)$ car il faut forcément que la norme V soit >0 .

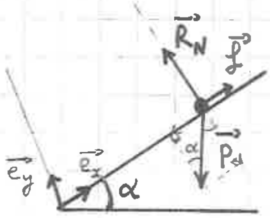
II Exemples de projections de vecteurs dans des situations rencontrées en physique.

Il s'agit, dans chaque cas, de donner l'expression des vecteurs dans la base indiquée sur le schéma.



$\vec{T} = -T \, \vec{e_r}$

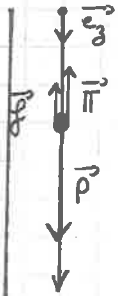
$\vec{P} = P\cos\theta \, \vec{e_r} - P\sin\theta \, \vec{e_\theta}$



$\vec{P} = \underbrace{-P\sin\alpha}_{P_x<0} \, \vec{e_x} \underbrace{- P\cos\alpha}_{P_y<0} \, \vec{e_y}$

$\vec{f} = \underbrace{f}_{f_x>0} \, \vec{e_x}$

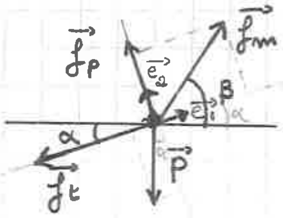
$\vec{R_N} = \underbrace{R_N}_{R_{Ny}>0} \, \vec{e_y}$



$\vec{P} = \underbrace{P}_{P_z>0} \vec{e_z} = mg \, \vec{e_z}$

$\vec{f} = \underbrace{-f}_{f_z<0} \, \vec{e_z}$

$\vec{\Pi} = \underbrace{-\Pi}_{\Pi_z<0} \, \vec{e_z}$



$\vec{P} = -P\sin\alpha \, \vec{e_1} - P\cos\alpha \, \vec{e_2}$

$\vec{f_m} = f_m \cos(\beta-\alpha) \, \vec{e_1} + f_m \sin(\beta-\alpha) \, \vec{e_2}$

$\vec{f_p} = f_p \, \vec{e_2}$

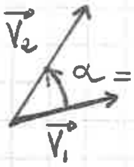
$\vec{f_t} = -f_t \, \vec{e_1}$

Rq: Quand on ne connaît pas à priori le sens d'un vecteur ou que celui-ci change au cours du mouvement. par exemple le vecteur accélération en physique, on laisse l'écriture $\vec{a} = a_x \, \vec{e_x}$ on cherche a_x en mettant en équation le problème et le signe de a_x nous donnera le sens de $\vec{a}$, $a_x = \pm a$ selon que $a_x > 0$ ($\vec{a}$ même sens que $\vec{e_x}$) ou $a_x < 0$ ($\vec{a}$ sens opposé à $\vec{e_x}$) , a étant la norme du vecteur $\vec{a}$, toujours >0 .

III Produit scalaire de 2 vecteurs

- Le produit scalaire de 2 vecteurs est une grandeur scalaire c'est à dire un nombre.
- $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}$ (" $\vec{V_1}$ scalaire $\vec{V_2}$ ") est égal à la norme de $\vec{V_1}$ fois la norme de $\vec{V_2}$ fois le cosinus de l'angle entre $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$.

$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = V_1 \times V_2 \times \cos(\widehat{\vec{V_1}, \vec{V_2}}) \longrightarrow$



$\alpha = (\widehat{\vec{V_1}, \vec{V_2}})$ angle orienté mais peu importe car $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$

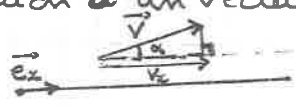
$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = \vec{V_2} \cdot \vec{V_1}$

$\vec{V_1} \perp \vec{V_2} \iff \vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = 0$ car $\cos 90° = 0$

- Si on exprime les 2 vecteurs dans une base orthonormée $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$: $\vec{V_1} \left| \begin{array}{l} V_{1x} \\ V_{1y} \\ V_{1z} \end{array} \right.$ $\vec{V_2} \left| \begin{array}{l} V_{2x} \\ V_{2y} \\ V_{2z} \end{array} \right.$

$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = V_{1x} V_{2x} + V_{1y} V_{2y} + V_{1z} V_{2z}$

- Projection d'un vecteur $\vec{V}$ sur un axe



La projection V_x du vecteur $\vec{V}$ selon $\vec{e_x}$ vaut $V_x = \vec{V} \cdot \vec{e_x} = V\cos\alpha$

IV Produit vectoriel de 2 vecteurs

- le produit vectoriel de 2 vecteurs est une grandeur vectorielle c'est à dire un vecteur avec donc, une direction, un sens, une norme

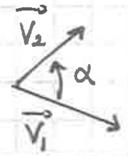
- le produit vectoriel des vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ est un vecteur, noté $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$

— de norme ou valeur $\| \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} \| = V_1 \times V_2 \times |\sin(\widehat{\vec{V_1}, \vec{V_2}})|$

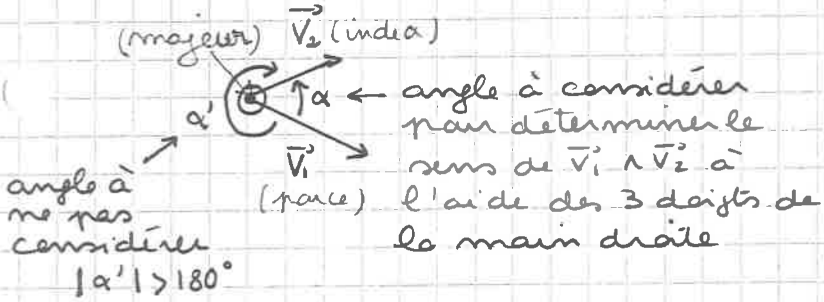
— de direction perpendiculaire à $\vec{V_1}$ et à $\vec{V_2}$ donc au plan $(\vec{V_1}, \vec{V_2})$

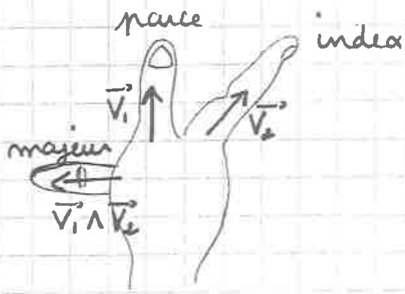
— de sens donné par la règle de la main droite ou la règle du tire - bouchon

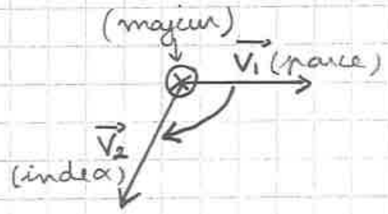
Rq : l'angle $(\widehat{\vec{V_1}, \vec{V_2}})$ est orienté



Règle des 3 doigts de la main droite : il faut choisir la position des doigts telle que $|(\widehat{\vec{V_1}, \vec{V_2}})| < 180°$

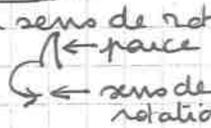


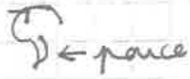




Rq : le symbole ⊙ indique une direction perpendiculaire au plan de la feuille et dirigée vers vous, vers l'avant.
le symbole ⊗ indique une direction perpendiculaire au plan de la feuille et dirigée vers l'arrière.

Règle du tire - bouchon : On tourne ~~ou~~ on visse le tire - bouchon (ou bouchon de bouteille ou capuchon stylo) dans le sens qui ramène $\vec{V_1}$ vers $\vec{V_2}$ (tel que $|(\widehat{\vec{V_1}, \vec{V_2}})| < 180°$) et l'on progresse selon le sens de $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$.
ou règle du pouce de la main droite : le sens de $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$ est donné par le pouce de la main droite à l'aide du sens de rotation ramenant $\vec{V_1}$ vers $\vec{V_2}$



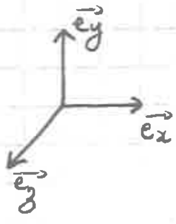


- $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = - \vec{V_2} \wedge \vec{V_1}$

$\vec{V_1}$ colinéaire à $\vec{V_2} \iff \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = 0$ car $\sin 0° = 0$

- Base orthonormée dite directe

$\vec{e_x} \wedge \vec{e_y} = \vec{e_z}$ $\quad \vec{e_y} \wedge \vec{e_z} = \vec{e_x}$ $\quad \vec{e_z} \wedge \vec{e_x} = \vec{e_y}$



• Si l'on exprime les 2 vecteurs dans la base orthonormée directe $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{array}{|c|c|} V_{1x} & V_{2x} \\ V_{1y} \quad \wedge & V_{2y} \\ V_{1z} & V_{2z} \end{array} \begin{array}{cc} V_{1x} & V_{2x} \\ V_{1y} & V_{2y} \end{array} = \left| \begin{array}{l} V_{1y} V_{2z} - V_{1z} V_{2y} \\ V_{1z} V_{2x} - V_{1x} V_{2z} \\ V_{1x} V_{2y} - V_{1y} V_{2x} \end{array} \right.$$

• Sens du vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$: le sens de $\vec{\omega}$ est donné par le pouce de la main droite à l'aide du sens de rotation $\vec{\omega}$ $\vec{\omega}$ ou bien en utilisant $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{GM}$ à l'aide des 3 doigts de la main droite ou du tire-bouchon.

Les développements limités

Les développements limités sont des outils incontournables en classes préparatoires et vous devrez les maîtriser très rapidement. Ils permettent de remplacer une fonction par une fonction polynômiale beaucoup plus simple à étudier.

• Partons d'abord d'un exemple simple : on veut calculer la valeur de la fonction $y = (1 + x)^2$ pour $x = 0{,}1$. Si on remplace x directement par 0,1 dans l'expression développée $1 + 2x + x^2$, on constate que le terme en x^2 est négligeable devant les autres. En l'omettant, la valeur trouvée est 1,20 au lieu de 1,21 (valeur exacte), soit un écart relatif de moins de 1 %. Dans le cas où x est égal à 0,01, l'écart n'est plus que de 0,01 %.

• De la même manière, $y = (1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$ peut être approché par $1 + 3x + 3x^2$ ou même par $1 + 3x$ si x est très petit et que l'on se contente d'une précision moindre.

• D'autres fonctions, non polynômiales, peuvent être approchées par des polynômes. Plus le nombre de termes conservés est grand, meilleure sera l'approximation. Ainsi, au voisinage de 0, tan x s'écrit :

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad \text{(une fonction impaire se développe en puissances impaires).}$$

On voit ainsi pourquoi on utilise l'approximation $\tan x \approx x$ pour les petits angles en optique. En effet, il s'agit d'un développement limité à l'ordre 1, valable dans le cas où le terme en x^3 est négligeable devant le terme en x.
De même, cos x s'écrit :

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots \quad \text{(une fonction paire se développe en puissances paires).}$$

On peut donc négliger les termes de degré supérieur à 2 pour x petit devant 1. Le développement limité à l'ordre 2 donne : $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

• Quand x est suffisamment petit, on peut donc limiter le développement aux premiers termes, d'où le nom de « développement limité ». L'écart entre la valeur exacte et la valeur approchée est alors de l'ordre du premier terme négligé.

Quelques développements classiques au voisinage de $x = 0$

$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha\, x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2$	à l'ordre 2
$\sin x \approx x$ (rad)	à l'ordre 1
$\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$ (rad)	à l'ordre 2
$\tan x \approx x$ (rad)	à l'ordre 1
$e^x \approx 1 + x$	à l'ordre 1
$\ln(1+x) \approx x$	à l'ordre 1