

Programme de colles

du 27/01/2025 au 31/01/2025

1 Dérivabilité

1. Nombre dérivé, fonction dérivée :
 - f dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ continue en x_0 .
 - Développement limité à l'ordre 1.
 - Opérations sur les dérivées : combinaisons linéaires, produit, quotient, composée, réciproque.
2. Propriétés des fonctions dérivables à valeurs réelles :
Extremum local, théorème de Rolle, égalité des accroissements finis, variations, inégalité des accroissements finis, théorème de la limite de la dérivée.
Application aux suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$.
3. Fonctions de classe \mathcal{C}^k : Formule de Leibniz.
4. Fonctions à valeurs complexes : Inégalité des accroissements finis.

2 Analyse asymptotique

1. Relation de comparaison pour les fonctions
 - (a) Définitions de dominée, négligeable et équivalent.
 - (b) Si f dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors $f(a+h) - f(a) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} hf'(a)$.
 - (c) Sommes d'équivalents, changement de variables, propriétés conservées par équivalence.
2. Développements limités
 - (a) Définition, unicité, troncature.
 - (b) Formule de Taylor-Young
 - (c) Linéarité, produit, primitivation, quotient.

Questions de cours

1. Dérivée de $f \times g$ (avec démo)
2. Dérivée de $1/f$ (avec démo)
3. Dérivée d'une composée (avec démo)
4. Dérivée d'une fonction réciproque (avec démo)
5. (f admet en a un extremum local et f dérivable en a) \Rightarrow ($f'(a) = 0$) (avec démo)
6. Égalité des accroissements finis (avec démo)
7. formule de Leibniz (énoncé uniquement)
8. Équivalent en 0 de $f(a+h) - f(a)$ dans le cas où $f'(a) \neq 0$ (avec démo)
9. Formule de Taylor-Young (énoncé uniquement) + un DL en 0 (au choix du colleur)

Tous les $DL_n(0)$ à connaître ou à savoir retrouver très rapidement : $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, sh, ch, sin, cos, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \ln(1-x)$, arctan et $DL_3(0)$ de tan.

Exercices

Tout exercice sur le programme ci-dessus. Bien sûr, les exercices peuvent faire appel aux programmes précédents.