

# Programme de colles

## du 03/02/2025 au 07/02/2025

### 1 Dérivabilité

1. Propriétés des fonctions dérivables à valeurs réelles :  
Extremum local, théorème de Rolle, égalité des accroissements finis, variations, inégalité des accroissements finis, théorème de la limite de la dérivée.  
Application aux suites définies par  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
2. Fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  : Formule de Leibniz.
3. Fonctions à valeurs complexes : Inégalité des accroissements finis.

### 2 Analyse asymptotique

1. Relation de comparaison pour les fonctions
  - (a) Définitions de dominée, négligeable et équivalent.
  - (b) Si  $f$  dérivable en  $a$  et  $f'(a) \neq 0$  alors  $f(a+h) - f(a) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} hf'(a)$ .
  - (c) Sommes d'équivalents, changement de variables, propriétés conservées par équivalence.
2. Développements limités
  - (a) Définition, unicité, troncature.
  - (b) Formule de Taylor-Young
  - (c) Linéarité, produit, primitivation, quotient.
3. Relation de comparaison pour les suites :  
Définitions de dominée, négligeable et équivalent.
4. Problèmes d'analyse asymptotique :  
Utilisation des DL pour les formes indéterminées, pour l'étude locale d'une fonction, pour l'étude des branches infinies.  
Développements asymptotiques dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales.

### 3 Espaces vectoriels

1. Définition et exemples d'espaces vectoriels
2. Combinaisons linéaires et sous-espace vectoriel
3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie finie
4. Somme de deux S.E.V., supplémentaires
5. Familles finies de vecteurs : famille libre, famille liée, famille génératrice.

**Remarque aux colleurs :** Les espaces vectoriels de dimension finie n'ont pas encore été vus.

---

---

## Questions de cours

1. Égalité des accroissements finis (avec démo)
2. formule de Leibniz (énoncé uniquement)
3. Équivalent en 0 de  $f(a+h) - f(a)$  dans le cas où  $f'(a) \neq 0$  (avec démo)
4. Formule de Taylor-Young (énoncé uniquement) + un DL en 0 (au choix du colleur)
5. Étudier la nature de la branche infinie de  $f(x) = (x+1)e^{1/x}$  au voisinage de  $+\infty$ .
6. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de  $E$  est un S.E.V. de  $E$  (avec démo)
7.  $F_1$  et  $F_2$  sont en somme directe  $\Leftrightarrow F_1 \cap F_2 = \{0\}$  (avec démo)
8. Caractérisation de  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  libre (énoncé uniquement)

---

---

Tous les DL <sub>$n$</sub> (0) à connaître ou à savoir retrouver très rapidement :  $x \mapsto e^x$ ,  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ , sh, ch, sin, cos,  $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$ ,  $x \mapsto \ln(1-x)$ , arctan et DL<sub>3</sub>(0) de tan.

---

---

## Exercices

Tout exercice sur le programme ci-dessus. Bien sûr, les exercices peuvent faire appel aux programmes précédents.