

Programme de colles

du 10/02/2025 au 14/02/2025

1 Analyse asymptotique

1. Relation de comparaison pour les suites : Définitions de dominée, négligeable et équivalent.
2. Problèmes d'analyse asymptotique :
Utilisation des DL pour les formes indéterminées, pour l'étude locale d'une fonction, pour l'étude des branches infinies.
Développements asymptotiques dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales.

2 Espaces vectoriels

1. Définition et exemples d'espaces vectoriels
2. Combinaisons linéaires et sous-espace vectoriel
3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie finie
4. Somme de deux S.E.V., supplémentaires
5. Familles finies de vecteurs : famille libre, famille liée, famille génératrice.
6. Base, bases canoniques de \mathbb{K}^n , de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

3 Espaces vectoriels de dimension finie

1. Théorème de la base extraite, théorème de la base incomplète
2. Caractérisation d'une base
3. Rang d'une famille finie de vecteurs
4. Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie
5. Existence et dimension de supplémentaires

Questions de cours

1. Étudier la nature de la branche infinie de $f(x) = (x + 1)e^{1/x}$ au voisinage de $+\infty$.
2. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un S.E.V. de E (avec démo)
3. F_1 et F_2 sont en somme directe $\Leftrightarrow F_1 \cap F_2 = \{0\}$ (avec démo)
4. (u_1, u_2, \dots, u_n) libre $\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0 \right)$
 \Leftrightarrow toute combinaison linéaire de (x_1, x_2, \dots, x_n) s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$
5. Formule de Grassmann : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ (avec démo partielle, le caractère libre est admis)

Exercices

Tout exercice sur le programme ci-dessus. Bien sûr, les exercices peuvent faire appel aux programmes précédents.