

# Programme de colles

## du 17/02/2025 au 21/02/2025

### 1 Espaces vectoriels de dimension finie

1. Théorème de la base extraite, théorème de la base incomplète
2. Caractérisation d'une base
3. Rang d'une famille finie de vecteurs
4. Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie
5. Existence et dimension de supplémentaires

### 2 Polynômes

1. L'ensemble  $\mathbb{K}[X]$  : Opérations, degré. Identification avec la fonction polynomiale.
2. Divisibilité et division euclidienne dans  $\mathbb{K}[X]$ .
3. Dérivation dans  $\mathbb{K}[X]$  : Dérivée  $k$ -ième, formule de Taylor.
4. Racines : caractérisation, ordre de multiplicité.
5. Décomposition en facteurs irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  et  $\mathbb{R}[X]$
6. Somme et produit des racines d'un polynôme.
7. Décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{R}$  des fonctions rationnelles à pôles simples.

---

---

#### Questions de cours

1. Formule de Grassmann :  $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$  (avec démo partielle, le caractère libre est admis)
  2.  $d^\circ(P + Q)$  et  $d^\circ(PQ)$  (avec démo)
  3. Formule de Taylor dans  $\mathbb{K}[X]$  (avec démo pour  $P = X^r$ )
  4.  $a$  est une racine de  $P \Leftrightarrow P$  est divisible par  $X - a$  (avec démo)
  5. Caractérisation des racines multiples (énoncé uniquement)
- 
- 

#### Exercices

Tout exercice sur le programme ci-dessus. Bien sûr, les exercices peuvent faire appel aux programmes précédents.