

Programme de colles

du 17/03/2025 au 21/03/2025

1 Applications linéaires

1. Définition, caractérisation, condition nécessaire ($f(0) = 0$).
2. Opérations : combinaisons linéaires, composée, formule du binôme.
3. Image et noyau.
4. Isomorphismes : définition, opérations (réciproque et composée).
5. homothéties ($x \mapsto ax$), projecteurs ($p \circ p = p$), symétries ($s \circ s = Id$).

2 Applications linéaires en dimension finie

1. Isomorphismes : caractérisation, espaces isomorphes.
2. Définition d'une application linéaire par l'image d'une base.
3. Rang d'une application linéaire : définition, théorème du rang.

Questions de cours

1. $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective ssi $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ (avec démo)
2. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ alors $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ (avec démo)
3. Si $p \in \mathcal{L}(E)$ alors p projecteur si et seulement si $p \circ p = p$ (avec démo)
4. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E alors f est un isomorphisme $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F (avec démo)
5. Forme géométrique du théorème du rang (avec démo)
6. Théorème du rang (avec démo)

Exercices

Tout exercice sur le programme ci-dessus. Bien sûr, les exercices peuvent faire appel aux programmes précédents.