

# Programme de colles

## du 24/03/2025 au 28/03/2025

### 1 Applications linéaires

1. Isomorphismes : définition, opérations (réciproque et composée).
2. homothéties ( $x \mapsto ax$ ), projecteurs ( $p \circ p = p$ ), symétries ( $s \circ s = Id$ ).

### 2 Applications linéaires en dimension finie

1. Isomorphismes : caractérisation, espaces isomorphes.
2. Définition d'une application linéaire par l'image d'une base.
3. Rang d'une application linéaire : définition, théorème du rang.
4. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie.

### 3 Dénombrement

#### 1. Cardinal d'un ensemble fini :

- Si  $f : E \rightarrow F$  avec  $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$  alors  $f$  bijective  $\Leftrightarrow f$  injective  $\Leftrightarrow f$  surjective.
- $\text{Card}(A) + \text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E)$ ,  $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$ ,  $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$ ,  $\text{Card}(\wp(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$

#### 2. Listes et combinaisons :

- Nombre d'applications injectives d'un ensemble fini dans un autre.
- Listes, permutations.
- Parties d'un ensemble : une  $p$ -combinaison de  $F$ , il y en a  $\binom{n}{p}$ , propriétés des  $\binom{n}{p}$ .

---

---

### Questions de cours

1. Si  $p \in \mathcal{L}(E)$  alors  $p$  projecteur si et seulement si  $p \circ p = p$  (avec démo)
2. Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  alors  $f$  est un isomorphisme  $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une base de  $F$  (avec démo)
3. Forme géométrique du théorème du rang (avec démo)
4. Théorème du rang (avec démo)
5.  $\text{Card}(\wp(E))$  (avec démo)
6.  $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$  (avec démo combinatoire)

---

---

### Exercices

Tout exercice sur le programme ci-dessus. Bien sûr, les exercices peuvent faire appel aux programmes précédents.