

Programme de colles

du 31/03/2025 au 04/04/2025

1 Dénombrement

1. Cardinal d'un ensemble fini :

- Si $f : E \rightarrow F$ avec $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ alors f bijective $\Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ surjective.
- $\text{Card}(A) + \text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E)$, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$, $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$, $\text{Card}(\wp(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$

2. Listes et combinaisons :

- Nombre d'applications injectives d'un ensemble fini dans un autre.
- Listes, permutations.
- Parties d'un ensemble : une p -combinaison de F , il y en a $\binom{n}{p}$, propriétés des $\binom{n}{p}$.

2 Matrices

1. Matrices et applications linéaires

- (a) Représentation d'une application linéaire par une matrice.
- (b) Opérations : combinaisons linéaires et composée.
- (c) Matrices inversibles et isomorphismes.

2. Noyau, image et rang d'une matrice

- (a) Application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- (b) Définitions du noyau, de l'image et du rang d'une matrice, théorème du rang.
- (c) Matrices inversibles
- (d) Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau).
Les opérations élémentaires conservent le rang.

3. Changement de base

- (a) Matrice de passage.
- (b) Changement de bases pour un endomorphisme. Matrices semblables.
- (c) Changement de bases pour une application linéaire.

Questions de cours

1. $\text{Card}(\wp(E))$ (avec démo)

2. $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$ (avec démo combinatoire)

3. \mathcal{B} base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$, f est un automorphisme de E si et seulement si la matrice de f dans \mathcal{B} est inversible (avec démo)

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ caractérisation de A inversible (5 propriétés mais pas de démo)

5. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ où (x_1, \dots, x_p) coordonnées de v dans \mathcal{B} , (y_1, \dots, y_p) coordonnées de v dans \mathcal{B}' et P matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' (avec démo)

Exercices

Tout exercice sur le programme ci-dessus. Bien sûr, les exercices peuvent faire appel aux programmes précédents.