

Programme de colles

du 07/04/2025 au 11/04/2025

1 Matrices

1. Matrices et applications linéaires

- (a) Représentation d'une application linéaire par une matrice.
- (b) Opérations : combinaisons linéaires et composée.
- (c) Matrices inversibles et isomorphismes.

2. Noyau, image et rang d'une matrice

- (a) Application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- (b) Définitions du noyau, de l'image et du rang d'une matrice, théorème du rang.
- (c) Matrices inversibles
- (d) Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau).
Les opérations élémentaires conservent le rang.

3. Changement de base

- (a) Matrice de passage.
- (b) Changement de bases pour un endomorphisme. Matrices semblables.
- (c) Changement de bases pour une application linéaire.

4. Systèmes linéaires

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est égal au noyau de la matrice des coefficients. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.

2 Probabilités

- 1. **Expérience aléatoire, univers et variable aléatoire** : Vocabulaire. Opérations.
- 2. **Espaces probabilisés finis** : Définition d'une probabilité. Propriétés.
- 3. **Probabilités conditionnelles** : Définition et propriétés. Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.

Questions de cours

- 1. $\mathcal{B}$ base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$, f est un automorphisme de E si et seulement si la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est inversible (avec démo)
- 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ caractérisation de A inversible (5 propriétés mais pas de démo)
- 3. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ où $(x_1, \dots, x_p)$ coordonnées de v dans $\mathcal{B}$, $(y_1, \dots, y_p)$ coordonnées de v dans $\mathcal{B}'$
et P matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (avec démo)
- 4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (avec démo).
- 5. Énoncé et démo de la formule des probabilités totales.

Exercices

Tout exercice sur le programme ci-dessus. Bien sûr, les exercices peuvent faire appel aux programmes précédents.