

# Programme de colles

## du 05/05/2025 au 09/05/2025

### 1 Probabilités :

1. **Loi d'une variable aléatoire** : Variable uniforme, de Bernoulli, binomiale. Couple de variables aléatoires.
2. **Événements indépendants** : Définition et propriété. Indépendance mutuelle, indépendance deux à deux.
3. **Variables aléatoires indépendantes** :  $X \perp\!\!\!\perp Y$  si  $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega))$ , les événements  $(X \in A)$  et  $(Y \in B)$  sont indépendants i.e.  $P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$ .  
 $X \perp\!\!\!\perp Y \implies f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$ . Lemme des coalitions.

### 2 Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe :

1. **Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe** :  $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$   
Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire. Espérance d'une variable constante, de Bernoulli, binomiale. Formule de transfert :  $E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$   
Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .
2. **Variance d'une variable aléatoire réelle, écart-type et covariance** :  $V(X) = E[(X - E[X])^2]$   
 $V(aX + b) = a^2V(X)$ ,  $V(X) = E[X^2] - E[X]^2$ . Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale. Covariance de deux variables aléatoires.  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ , cas de deux variables indépendantes. Variance d'une somme, cas de variables décorréliées.

### 3 Inégalités probabilistes :

Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

---

---

#### Questions de cours

1. Loi binomiale : exemple fondamental + formule.
2. Si  $A$  et  $B$  sont deux événements indépendants alors  $\bar{A}$  et  $B$  sont indépendants (avec démo).
3. L'espérance est linéaire (avec démo).
4. Démo de  $V(aX + b) = a^2V(X)$  et  $V(X) = E[X^2] - E[X]^2$ .
5. Espérance et variance de  $X$  qui suit une loi uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$  (avec démo).
6.  $V(aX + bY)$  en fonction de la covariance (avec démo).
7. Inégalité de Markov (avec démo).

---

---

#### Exercices

Tout exercice sur le programme ci-dessus. Bien sûr, les exercices peuvent faire appel aux programmes précédents.