

Programme de colles

du 12/05/2025 au 16/05/2025

1 Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe :

1. **Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe :** $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$

Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire. Espérance d'une variable constante, de Bernoulli, binomiale. Formule de transfert : $E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$

Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

2. **Variance d'une variable aléatoire réelle, écart-type et covariance :** $V(X) = E[(X - E[X])^2]$
 $V(aX + b) = a^2V(X)$, $V(X) = E[X^2] - E[X]^2$. Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale. Covariance de deux variables aléatoires. $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, cas de deux variables indépendantes. Variance d'une somme, cas de variables décorrélées.

2 Inégalités probabilistes :

Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

3 Intégration

1. Fonctions en escalier
2. Intégrale d'une fonction continue sur un segment
3. Sommes de Riemann
4. Calcul intégral révision : lien primitives-intégrales, IPP, changement de variables ...

Questions de cours

1. L'espérance est linéaire (avec démo).
2. Démo de $V(aX + b) = a^2V(X)$ et $V(X) = E[X^2] - E[X]^2$.
3. Espérance et variance de X qui suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$ (avec démo).
4. $V(aX + bY)$ en fonction de la covariance (avec démo).
5. Inégalité de Markov (avec démo).
6. Sommes de Riemann : Si $f \in C^0([a, b])$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)f(x_i) = \int_a^b f(t) dt$
où $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$ (avec démo dans le cas où f est k -lipschitzienne)

Exercices

Tout exercice sur le programme ci-dessus. Bien sûr, les exercices peuvent faire appel aux programmes précédents.