

Programme de colles

du 19/05/2025 au 23/05/2025

1 Intégration

1. Fonctions en escalier
2. Intégrale d'une fonction continue sur un segment
3. Sommes de Riemann
4. Calcul intégral révision : lien primitives-intégrales, IPP, changement de variables ...
5. Inégalité de Taylor-Lagrange.
6. Fonctions à valeurs complexes.

2 Déterminants

1. **Déterminant d'une famille de vecteurs** : Le déterminant dans la base \mathcal{B} est l'unique application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ vérifiant : $\det_{\mathcal{B}}$ linéaire par rapport à chacune de ses variables, $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée et $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.
 $\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ \mathcal{F} base de $E \iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$
2. **Déterminant d'un endomorphisme** : $\det(f \circ g) = \det(g \circ f) = \det f \times \det g$
 f bijective $\iff \det f \neq 0$ et dans ce cas, $\det(f^{-1}) = 1/\det(f)$ $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$
3. **Déterminant d'une matrice carrée** : Effets des opérations élémentaires sur le déterminant.
 A est inversible $\iff \det A \neq 0$ et dans ce cas, $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
 $\det(AB) = \det(BA) = \det A \times \det B$ $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ $\det A = \det A^T$
Développement du déterminant par rapport à une colonne ou une ligne.

Remarque aux colleurs : On aura fait peu d'exemples de calculs de déterminants.

Questions de cours

1. Sommes de Riemann : Si $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i) = \int_a^b f(t) dt$
où $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$ (avec démo dans le cas où f est k -lipschitzienne)
2. Inégalité de Taylor-Lagrange (avec démo)
3. f à valeurs complexes et $a < b$: $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ (avec démo)
4. En dim 2, expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées (avec démo).

Exercices

Tout exercice sur le programme ci-dessus. Bien sûr, les exercices peuvent faire appel aux programmes précédents.