

Programme de colles

du 02/06/2025 au 06/06/2025

1 Intégration

1. Inégalité de Taylor-Lagrange.
2. Fonctions à valeurs complexes.

2 Déterminants

1. **Déterminant d'une famille de vecteurs** : Le déterminant dans la base \mathcal{B} est l'unique application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ vérifiant : $\det_{\mathcal{B}}$ linéaire par rapport à chacune de ses variables, $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée et $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

$$\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \quad \mathcal{F} \text{ base de } E \iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$$

2. **Déterminant d'un endomorphisme** : $\det(f \circ g) = \det(g \circ f) = \det f \times \det g$
 f bijective $\iff \det f \neq 0$ et dans ce cas, $\det(f^{-1}) = 1/\det(f)$ $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$

3. **Déterminant d'une matrice carrée** : Effets des opérations élémentaires sur le déterminant.

A est inversible $\iff \det A \neq 0$ et dans ce cas, $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

$$\det(AB) = \det(BA) = \det A \times \det B \quad \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A) \quad \det A = \det A^T$$

Développement du déterminant par rapport à une colonne ou une ligne.

3 Espaces préhilbertiens réels

1. **Produit scalaire** : Définition et exemples
2. **Norme associée à un produit scalaire** : Propriétés : $\|u\| = 0 \iff u = 0$, $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$, inégalité de Cauchy-Schwarz + cas d'égalité, inégalité triangulaire, identités remarquables, identités de polarisation, identité du parallélogramme.
3. **Orthogonalité** : Théorème de Pythagore (pour 2 vecteurs et pour une famille orthogonale de p vecteurs). Orthogonal d'un sous-espace vectoriel, algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Questions de cours

1. Inégalité de Taylor-Lagrange (avec démo)
2. f à valeurs complexes et $a < b$: $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ (avec démo)
3. En dim 2, expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées (avec démo).
4. Inégalité de Cauchy-Schwarz (avec démo).
5. Inégalité triangulaire (avec démo).

Exercices

Tout exercice sur le programme ci-dessus. Bien sûr, les exercices peuvent faire appel aux programmes précédents.