

Programme de colles

du 09/06/2025 au 13/06/2025

1 Espaces préhilbertiens réels

1. **Produit scalaire** : Définition et exemples
2. **Norme associée à un produit scalaire** : Propriétés : $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$, $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$, inégalité de Cauchy-Schwarz + cas d'égalité, inégalité triangulaire, identités remarquables, identités de polarisation, identité du parallélogramme.
3. **Orthogonalité** : Théorème de Pythagore (pour 2 vecteurs et pour une famille orthogonale de p vecteurs). Orthogonal d'un sous-espace vectoriel, algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
4. **Bases orthonormées d'un espace euclidien** : Existence de bases orthonormées. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.
5. **Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie** : Projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace V de dimension finie. Inégalité de Bessel. La distance de x à V . Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace V de dimension finie. En dimension finie, dimension de $V^\perp$.

2 Séries numériques

1. **Généralités** : Définition, convergence, somme et restes. Linéarité de la somme. Condition nécessaire de convergence. Séries géométriques. Séries exponentielles.
2. **Séries à termes positifs** : CNS de convergence. Théorèmes de comparaison et d'équivalence. Séries de Riemann.

Questions de cours

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz (avec démo).
 2. Inégalité triangulaire (avec démo).
 3. Si $(e_1, \dots, e_p)$ B.O.N. de V alors $p_V(x) = \sum_{k=1}^p (x|e_k)e_k$ (avec démo).
 4. Inégalité de Bessel + $\forall y \in V, \|x - p_V(x)\| \leq \|x - y\|$ (avec démos).
 5. Nature de la série $(\sum \frac{1}{n})$ et nature de la série $(\sum \frac{1}{n^2})$ (avec démo).
-
-

Exercices

Tout exercice sur le programme ci-dessus. Bien sûr, les exercices peuvent faire appel aux programmes précédents.