

Programme de colles

du 16/06/2025 au 20/06/2025

1 Espaces préhilbertiens réels

1. **Bases orthonormées d'un espace euclidien** : Existence de bases orthonormées. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.
2. **Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie** : Projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace V de dimension finie. Inégalité de Bessel. La distance de x à V . Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace V de dimension finie. En dimension finie, dimension de V^\perp .

2 Séries numériques

1. **Généralités** : Définition, convergence, somme et restes. Linéarité de la somme. Condition nécessaire de convergence. Séries géométriques. Séries exponentielles.
2. **Séries à termes positifs** : CNS de convergence. Théorèmes de comparaison et d'équivalence. Séries de Riemann. Comparaison série-intégrale.
3. **Séries absolument convergentes** : Définition, $\text{CV Abs} \Rightarrow \text{CV}$, inégalité triangulaire.

Questions de cours

1. Si (e_1, \dots, e_p) B.O.N. de V alors $p_V(x) = \sum_{k=1}^p (x|e_k)e_k$ (avec démo).
2. Inégalité de Bessel + $\forall y \in V, \|x - p_V(x)\| \leq \|x - y\|$ (avec démos).
3. Nature de la série $(\sum \frac{1}{n})$ et nature de la série $(\sum \frac{1}{n^2})$ (avec démo).
4. CNS de convergence d'une série de Riemann (avec démo).

Exercices

Tout exercice sur le programme ci-dessus. Bien sûr, les exercices peuvent faire appel aux programmes précédents.