Chapitre 1, exercices : corrigés.

Exo 1 on a $(a+b)(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)$

$= a^6 - \cancel{a^5b} + \cancel{a^4b^2} - \cancel{a^3b^3} + \cancel{a^2b^4} - \cancel{ab^5}$
$+ \cancel{a^5b} - \cancel{a^4b^2} + \cancel{a^3b^3} - \cancel{a^2b^4} + \cancel{ab^5} - b^6$ par distributivité.

$= \underline{a^6 - b^6}$

Exo 2 on veut démontrer : $\forall x, y, z, (x=y \text{ et } y=z) \Rightarrow x=z$

Soient x, y, z tels que $x=y$ et $y=z$; montrons $x=z$:

Notons $P(x)$ la propriété $x=z$. On a par hypothèse $P(y)$

On a aussi $x=y$, donc par symétrie de l'égalité, on a $y=x$

et donc par substitutivité de l'égalité, on a donc $P(x)$, (car on a $P(y)$)

c'est-à-dire $\underline{x=z}$ CQFD.

Exo 3 $\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{2+1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{1+\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\frac{5}{3}} = \dfrac{3}{5}$,

$\dfrac{1}{1+\frac{3}{5}} = \dfrac{1}{\frac{8}{5}} = \dfrac{5}{8}$, $\dfrac{1}{1+\frac{5}{8}} = \dfrac{1}{\frac{13}{8}} = \dfrac{8}{13}$

$\dfrac{1}{1+\frac{8}{13}} = \dfrac{1}{\frac{13+8}{13}} = \dfrac{1}{\frac{21}{13}} = \dfrac{13}{21}$,

d'où $1 + \dfrac{13}{21} - \dfrac{34}{21} = \dfrac{21+13-34}{21} = \boxed{0}$

Exo 4 a) $a_1 = \dfrac{3}{2}$ $a_2 = 1 + \dfrac{1}{\frac{5}{2}} = 1 + \dfrac{2}{5} = \dfrac{7}{5}$ $a_3 = \dfrac{17}{12}$

$a_8 = \dfrac{1393}{985}$

b) on a $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+a_n}$, car $a_n \geqslant 1$ donc $a_n \neq 0$

d'où $(1+a_n)a_{n+1} = 1 + a_n + 1$, et donc

$$\boxed{a_n(a_{n+1}-1) + a_{n+1} - 2 = 0}$$

c) soit a la limite supposée de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,
alors a vérifie $a(a-1)+a-2=0$
donc $a^2-a+a-2=0$, i.e. $a^2=2$ d'où $a=\pm\sqrt{2}$
or $\forall n\in\mathbb{N}^*, a_n\geq 0$ donc $a\geq 0$ et donc $\boxed{a=\sqrt{2}}$

on peut alors écrire

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots}}}}$$ ("fraction continue de $\sqrt{2}$")

Exo5 $\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}=e^{i\frac{\pi}{4}}$ (module 1, argument $\frac{\pi}{4}$)

le nombre recherché est donc $\underbrace{e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{-i\frac{\pi}{4}}}_{1}\times\underbrace{\left(-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\times\left(-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)}_{1}=\boxed{1}$

Exo6 on a $a=b$, donc $a-b=0$, et on ne peut donc simplifier par $a-b$!

Exo7 a) simple calcul algébrique.

b) $S_2^2-2S_1S_3=x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2$

c) $x^2+y^2+z^2=S_1^2-2S_2$

d) simple calcul...

e) $x^3+y^3+z^3=S_1^3-3S_1S_2+3S_3$ (développer S_1^3 et utiliser a))

f) avec d) on a $x^n-S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}-S_3x^{n-3}=0$, $\forall n\geq 3$

si on note $A_n=x^n+y^n+z^n$, on a donc

$$A_n-S_1A_{n-1}+S_2A_{n-2}-S_3A_{n-3}=0$$, posons $A_0=3=x^0+y^0+z^0$

d'où, $\forall n\geq 3$, $A_n=S_1A_{n-1}-S_2A_{n-2}+S_3A_{n-3}$

On connait A_0, A_1, A_2, et même A_3, on peut alors, de proche en proche, calculer A_n...

Exo 8 on obtient 1, parce que $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

et $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Exo 9 on obtient 1, car $\cos\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

et $\sin\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Exo 10 si $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a^7+a+1 > 1$ donc le dénominateur est $\neq 0$.

on a $(x^n)^m = x^{nm}$ d'où l'expression est égale à 1...

Exo 11 non, car si $c=0$, $ac=bc=0$

Exo 12 a) $a+c=b+d \Rightarrow c-d=b-a$ or $c-d \leq 0$

et $b-a \geq 0$

donc $c-d=0=b-a$ donc $\boxed{c=d \text{ et } b=a}$ $\square$

b) on a $a \leq b$, donc $a+c \leq b+c$ or $c<d$

donc $b+c < b+d$,

et donc $\boxed{a+c<b+d}$ $\square$

Exo 13 (E) $\sqrt{x+1} = 3x-7$ donc $x+1 \geq 0$, i.e. $x \geq -1$

en élevant au carré : $x+1 = (3x-7)^2 = 9x^2 - 42x + 49$

donc $9x^2 - 43x + 48 = 0$ $(*)$

le discriminant Δ vérifie $\Delta = (43)^2 - 4 \times 9 \times 48 = 121 = 11^2$

les solutions de l'équation $(*)$ sont donc

$$\frac{43-11}{18} = \frac{16}{9} \text{ et } \frac{43+11}{18} = 3$$

$\frac{16}{9}$ ne vérifie pas (E) car $3 \times \frac{16}{9} - 7 < 0$, 3 vérifie (E)

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de (E) est } S = \{3\}}$

$\boxed{\text{Exo 14}}$ la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

donc l'inéquation est équivalente à $\left(x-\frac{2}{x}\right)^2 < 1$ (E)

on a donc $x \neq 0$. Soit donc $x \neq 0$:

On a (E) $\Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{x}\right)^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{x}-1\right)\left(x-\frac{2}{x}+1\right) < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-2-x}{x} \, \dfrac{x^2-2+x}{x} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2}(x-2)(x+1)(x+2)(x-1) < 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x-2)(x+1)(x+2)(x-1)}_{P} < 0$

faisons un tableau de signes :

x		-2		-1		1		2	
$x-2$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
P	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

d'où $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } S =]-2,-1[\cup]1,2[}$

$\boxed{\text{Exo 15}}$ pour éliminer les valeurs absolue, étudions les signes de $x+3$, $x-1$, $2x+1$; i.e. les positions de x par rapport à -3, 1, et $-\frac{1}{2}$. Posons $f(x) = |x+3| - |x-1| - |2x+1|$

<u>si $x \leq -3$:</u> $f(x) = -(x+3) - (-(x-1)) - (-(2x+1))$ car $|x+3| = -(x+3)$ etc

$= -\cancel{x} - 3 + \cancel{x} - \cancel{1} + 2x + \cancel{1} = 2x-3$

donc $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$: impossible car $x \leq -3$

<u>si $-3 \leq x \leq -\frac{1}{2}$:</u> $f(x) = x+3 - (-(x-1)) - (-(2x+1)) = 4x+3$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4} \in \left[-3, -\frac{1}{2}\right]$: <u>OK</u>

<u>si $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$:</u> $f(x) = x+3 - (-(x-1)) - (2x+1) = 1 \neq 0$

<u>si $x \geq 1$:</u> $f(x) = x+3 - (x-1) - (2x+1) = -2x+3$

donc $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \in [1, +\infty[$: <u>OK</u>

$$\boxed{\text{Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est } S=\left\{-\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right\}}$$

Exo 16 on doit avoir $\left.\begin{array}{l} 2-x\geq 0 \text{ i.e. } x\leq 2 \\ \text{et } 3+x\geq 0 \text{ i.e. } x\geq -3\end{array}\right\}$ donc $\underline{x\in[-3,2]}$

si $x\in[-3,0]$, $2-x\geq 2$ donc $\sqrt{2-x}\geq\sqrt{2}\geq 1$

donc $\sqrt{2-x}+\sqrt{3+x}\geq 1$

si $x\in[0,2]$, $3+x\geq 3$, donc $\sqrt{3+x}\geq\sqrt{3}\geq 1$

donc $\sqrt{2-x}+\sqrt{3+x}\geq 1$

finalement, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } S=[-3,2]}$

Exo 17 Soient $a,b\in\mathbb{R}^+$, on a $\sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\iff (\sqrt{a+b})^2\leq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ car $\sqrt{a+b}\geq 0$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq 0$

$\iff a+b\leq a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b$

$\iff 0\leq 2\sqrt{a}\sqrt{b}$ ce qui est vrai

Ainsi on a démontré $\boxed{\forall a,b\in\mathbb{R}^+,\ \sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Exo 18 on a $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

or $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}>2\sqrt{n}$ donc $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

de même, $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\dfrac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}>\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

CQFD

on a donc $\sqrt{10001}-\cancel{\sqrt{10000}}<\dfrac{1}{2\sqrt{10000}}<\sqrt{10000}-\cancel{\sqrt{9999}}$

$+\ \cancel{\sqrt{10000}}-\cancel{\sqrt{9999}}<\dfrac{1}{2\sqrt{9999}}<\cancel{\sqrt{9999}}-\cancel{\sqrt{9998}}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$+\ \cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1}<\dfrac{1}{2\sqrt{1}}<\cancel{\sqrt{1}}-\sqrt{0}$

d'où $\sqrt{10001}-1<\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{10000}}\right)<\sqrt{10000}=100$

d'où la partie entière recherchée : $\boxed{99}$

car $100^2<10001$