Chapitre 2 : Corrections des exercices

Exo 1 a)

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} + \sum_{k=1}^{n} (-u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} + \sum_{k'=0}^{n-1} (-u_{k'+1})$$

avec $k'=k-1$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} + \sum_{k'=0}^{n-1} (-u_{k+1}) \text{ en changeant } k' \text{ en } k.$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{linéarité}}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} 0 = 0 \times n = \boxed{0}$$

b) $4+7+10+13+\dots+34 = 4+(4+3\times 1)+(4+3\times 2)+\dots+(4+3\times 10)$

$$= \boxed{\sum_{k=0}^{10} (4+3k)}$$

c) $1+9+25+\dots+121 = 1+(1+2\times 1)^2+(1+2\times 2)^2+\dots+(1+2\times 5)^2$

$$= \sum_{k=0}^{5} (1+2k)^2$$

Exo 2 $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} (k^2+k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{2} n(n+1)\left[\frac{2}{3}n + \frac{1}{3} + 1\right]$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+4) = \boxed{\frac{1}{3} n(n+1)(n+2)}$$

Exo 3 $S_n = i^1\times 1 + i^2\times 2 + i^3\times 3 + i^4\times 4 + \dots + i^{4n}\times 4n$

$= (i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)+\dots+(i(4n-3)-(4n-2) - i(4n-1)+4n)$

$= i(1+5+9+\dots+4n-3) - (2+6+10+\dots+4n-2) - i(3+7+11+\dots+4n-1) + 4+8+12+\dots+4n$

$$= i\sum_{k=0}^{n-1}(1+4k) - \sum_{k=0}^{n-1}(2+4k) - i\sum_{k=0}^{n-1}(3+4k) + \sum_{k=0}^{n-1}(4+4k)$$

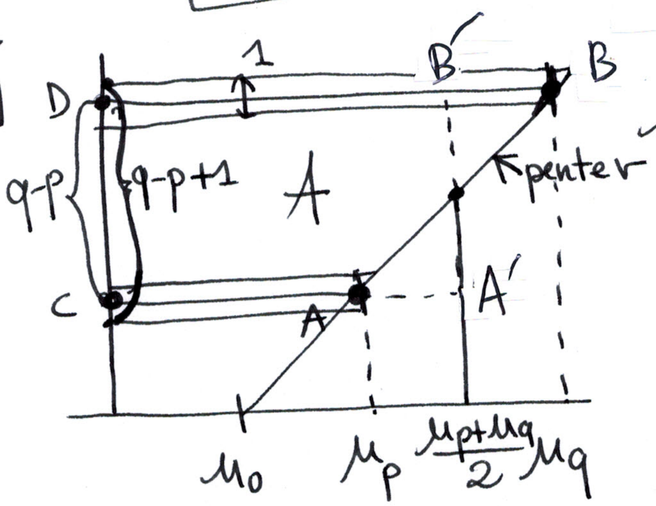
donc $S_n = i\left(n + \cancel{4\sum_{k=0}^{n-1} k}\right) - 2n - \cancel{4\sum_{k=0}^{n-1} k}$

$$-i\left(3n + \cancel{4\sum_{k=0}^{n-1} k}\right) + 4n + \cancel{4\sum_{k=0}^{n-1} k}$$

$$= 2n - 2ni = 2n(1-i)$$

Ainsi $\boxed{S_n = 2n(1-i)}$

Exo 4



A aire du trapèze ABDC

$(q-p+1) \times \frac{u_p+u_q}{2}$

= aire du rectangle A'B'DC

Exo 5 $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ car $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)}$

ainsi $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ et par télescopage,

avec $u_k = \frac{-1}{k}$, on a $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1}$

d'où $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}}$

Exo 6 $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$ donc

$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\underbrace{\ln(k+1)}_{u_{k+1}} - \underbrace{\ln(k)}_{u_k}\right)$ et par télescopage,

$$= \ln(n+1) - \ln(1) = \boxed{\ln(n+1)}$$

Exo7 on remarque que $\dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{(k+2)-k}{k(k+2)(k+2)} = \dfrac{2}{k(k+1)(k+2)}$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(\underbrace{\frac{1}{k(k+1)}}_{u_k} - \underbrace{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}_{u_{k+1}}\Big)$

$= \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1\times 2} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$ par télescopage.

$= \boxed{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}}$

Exo8 on doit montrer $P(n)$: $\dbinom{n}{p+1} = \displaystyle\sum_{k=p}^{n-1}\binom{k}{p}$ pour tout $n > p > 0$

Si $n \geq 1$, $n > p$ | la relation du triangle de Pascal nous dit $\dbinom{n}{p+1} = \dbinom{n-1}{p+1} + \dbinom{n-1}{p}$

Cela suggère une récurrence sur n:

Montrons $\forall n > p$, $P(n)$ par récurrence sur n:

Cas de base: $n = p+1$: $P(p+1)$: $\dbinom{p+1}{p+1} = \displaystyle\sum_{k=p}^{p}\binom{p}{p} = \binom{p}{p} = 1$ ok

car $\dbinom{p+1}{p+1} = 1$

Cas de récurrence: Supposons $P(n)$, pour $n > p$

on a $\dbinom{n+1}{p+1} = \dbinom{n}{p+1} + \dbinom{n}{p}$ par la relation de Pascal

$= \displaystyle\sum_{k=p}^{n-1}\binom{k}{p} + \binom{n}{p}$ par l'hypothèse de récurrence $P(n)$

$= \displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Ainsi $\boxed{\forall n > p,\ P(n) \text{ est vraie}}$

Exo 9 a) on a $(1+x)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} x^k$ (*) par le binôme de Newton

mais aussi $(1+x)^{p+q} = (1+x)^p (1+x)^q = \left(\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} x^j\right)$

$$= \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} \binom{p}{i}\binom{q}{j} x^{i+j}$$ regroupons les puissances de x :

$$(1+x)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \Bigg[\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \underbrace{\binom{q}{k-i}}_{=j} \Bigg] x^{\underbrace{k}_{=i+j}}$$

rem : si $k-i<0$, on pose $\binom{q}{k-i}=0$

on a $(1+x)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} x^k$ par (*) donc, ces deux polynômes eux x sont égaux, donc ont mêmes coefficients :

$$\forall k \leq p+q, \quad \binom{p+q}{k} = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}\binom{q}{k-i}$$

ainsi, si $k \leq p$ et $k \leq p$ on a $\boxed{\binom{p+q}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{p}{i}\binom{q}{k-i}}$, puisque si $i>k$ $\binom{q}{k-i}=0$

CQFD

---

b) prenons $n=p$ et $q=p$, dans a), on obtient :

$$\binom{2p}{p} = \binom{p}{0}\binom{p}{p} + \binom{p}{1}\binom{p}{p-1} + \cdots + \binom{p}{k}\binom{p}{p-k} + \cdots + \binom{p}{p}\binom{p}{0}$$

or $\binom{p}{p-k} = \binom{p}{k}$ par symétrie des coefficients du triangle de Pascal,

donc $\boxed{\binom{2p}{p} = \binom{p}{0}^2 + \binom{p^2}{1} + \cdots + \binom{p}{k}^2 + \cdots + \binom{p}{p}^2}$ CQFD

Exo 11 par récurrence, on montre sans difficulté

que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Exo 12 calculons le second membre de l'égalité à prouver :

$$a_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)B_k = a_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}B_k + \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k$$

posons $k' = k+1$

$$= a_n B_n - \sum_{k'=1}^{n} a_{k'} B_{k'-1} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k$$

on renomme k' en k

$$= a_n B_n - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k$$

$$= a_n B_n - a_n B_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_{k-1} + a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k$$

$$= a_n(B_n - B_{n-1}) + a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k (B_k - B_{k-1}) \quad \text{car } B_0 = b_0$$

$$= a_n b_n + a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k \quad \text{car } B_k - B_{k-1} = b_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \quad \underline{\text{CQFD}}$$

Exo 13

$$\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} \min(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1} \min(i,j) + \sum_{j=i}^{n} \min(i,j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1} j + \sum_{j=i}^{n} i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(i-1)i}{2} + (n-i+1)i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^2 - i + 2ni - 2i^2 + 2i}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(-i^2+(2n+1)i\right) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{2n+1}{2}\sum_{i=1}^{n} i$$

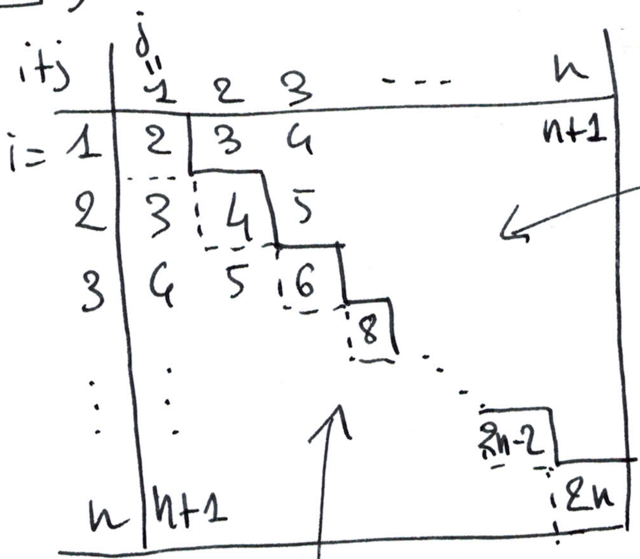
$$= -\frac{1}{2}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}(2n+1)\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= n(n+1)(2n+1)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right) = n(n+1)(2n+1)\underbrace{\left(\frac{3-1}{12}\right)}_{=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}}$$

donc $\boxed{\displaystyle\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \min(i,j) = \frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1)}$

$= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$: pourquoi ? bizarre...

Exo 14 un dessin :



zone $i>j$

zone $i\le j$

le tableau est symétrique par rapport à la diagonale, donc on a

$$\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}(i+j) = 2\sum_{1\le i\le j\le n}(i+j) - \sum_{i=1}^{n}(2i)$$

les 2 triangles dessous et dessous la diagonale ont même somme

diagonale

Donc $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n}(i+j) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}(i+j) + \sum_{i=1}^{n} i$ → on compte la diagonale dans chaque triangle, on doit donc la retrancher.

or $\displaystyle\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}(i+j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j$

$\displaystyle = \sum_{i=1}^{n} in + \sum_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2} = n\,\frac{n(n+1)}{2} + n\,\frac{n(n+1)}{2} = n^2(n+1)$

d'où $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n}(i+j) = \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}(n+1) = \boxed{\frac{n(n+1)^2}{2}}$