Sommes indicées, coefficients binomiaux

Exercice 1
(1249)
À partir des valeurs connues de $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$, calculer :

1. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$
2. $1.n + 2.(n-1) + \cdots + (n-1).2 + n.1.$

Exercice 2
(1250)
Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k$$

Exercice 3
(1257)
Calculer, pour tout $\theta \in$, la somme $\sum_{k=0}^{n} {}^{\text{ß}k\theta}$.

Exercice 4
(1258)
Calculer, pour tout $q \in$, la somme $\sum_{k=0}^{n} q^{2k}$.

Exercice 5
(1261)
Pour $n \in^*$, simplifier

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1}$$

Exercice 6
(1263)
Calculer

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Exercice 7
(3412)
Télescopage

Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+3}.$$

En déduire la valeur de la somme
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}.$$

Exercice 8

(3416)

Simplifier !

Simplifier les sommes et produits suivants :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ **2.** $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$.

Exercice 9

(3420)

Somme géométrique dans tous ses états

Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-2)^n$. Calculer les sommes suivantes :
$$\sum_{k=0}^{2n} u_k; \quad \sum_{k=0}^{2n+1} u_k; \quad \sum_{k=0}^{n} u_{2k}; \quad \sum_{k=0}^{2n} (u_k + n); \quad \left(\sum_{k=0}^{2n} u_k\right) + n; \quad \sum_{k=0}^{n} u_{k+n}; \quad \sum_{k=0}^{n} u_{kn}.$$

Exercice 10

(3426)

Factorielle et coefficients binomiaux

Soient $n, p \geq 1$. Démontrer que
$$\binom{n-1}{p-1} = \frac{p}{n}\binom{n}{p}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a, , b$ réels non nuls, simplifier les expressions suivantes :

1. $(n+1)! - n!$ **2.** $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!}$ **3.** $\dfrac{n+2}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!}$ **4.** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ où $u_n = \dfrac{a^n}{n!b^{2n}}$.

Exercice 11

(3429)

Formule du binôme

Développer $(x+1)^6$, $(x-1)^6$.

Simplifier les nombres complexes suivants : $(1+i)^5$, $(1-i)^4$.

Démontrer que, pour tout entier n, on a $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.