Corrigé
Sommes indicées, coefficients binomiaux

Exercice 1
(1249)

(a) En séparant la somme

$$\sum_{k=1}^{n} k\,(k+1)\ = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)\ (n+2)}{3}$$

(b) On réécrit

$$1.n + 2.\,(n-1)\ + \ldots + \ (n-1)\,.2 + n.1 = \sum_{k=1}^{n} k\,(n+1-k)$$

et on réorganise

$$\sum_{k=1}^{n} k\,(n+1-k)\ =\ (n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\ (n+2)}{6}$$

Exercice 2
(1250)

D'une part

$$\sum_{k=1}^{2p} (-1)^k k = \sum_{\updownarrow=1}^{p} \left(-\left(2\updownarrow-1\right)\ + 2\updownarrow\right)\ = p$$

et d'autre part

$$\sum_{k=1}^{2p+1}\ (-1)^k k = p - \ (2p+1)\ = -\,(p+1)$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (-1)^n\,(n+1)\,/2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Exercice 3
(1257)

Si

$$\theta \neq 0\ [2\pi]$$

alors

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(n+1)\,\theta} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1}$$

(somme géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$) Si

$$\theta = 0\ [2\pi]$$

alors

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$$

Exercice 4
(1258)
Si $q^2 \neq 1$ alors

$$\sum\nolimits_{k=0}^{n} q^{2k} = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1}$$

(somme géométrique de raison q^2) Si $q^2 = 1$ alors $\sum\nolimits_{k=0}^{n} q^{2k} = n+1$.

Exercice 5
(1261)
Pour $n \geq 2$, on a

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1} = \frac{(2n+3)\,(2n+1)\,(2n-1)\,\times \ldots \times 5}{(2n-1)\,(2n-3)\,\times \ldots \times 5 \times 3 \times 1}$$

puis après simplification

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1} = \frac{(2n+3)\,(2n+1)}{3}$$

et pour $n = 1$
$\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1} = 5$ ce qui rend la formule précédente encore valable.

Exercice 6
(1263)

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1}\frac{3}{2}\ldots\frac{n+1}{n} = n+1$$

Exercice 7
(3412)
On réduit au même dénominateur, et on trouve

$$\frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+3} = \frac{(a+b)k + (3a+b)}{(k+1)(k+3)}.$$

Par identification, on cherche à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a+b & = & 0 \\ 3a+b & = & 1 \end{array} \right.$$

dont la seule solution est $a = 1/2$, $b = -1/2$. On en déduit

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2}\sum_k = 0\hat{}n\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2}\sum_k = 0\hat{}n\frac{1}{k+3} \\
&= \frac{1}{2}\sum_k = 0\hat{}n\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2}\sum_k = 2\hat{}n+2\frac{1}{k+1} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) \\
&= \frac{3n\hat{}2 + 11n + 8}{4(n+2)(n+3)}.
\end{aligned}$$

Exercice 8
(3416)

On commence par remarquer que

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_k = 1\hat{}n\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_k = 1\hat{}n\ln(k+1) - \sum_k = 1\hat{}n\ln(k) \\
&= \sum_k = 2\hat{}n+1\ln(k) - \sum_k = 1\hat{}n\ln(k) \\
&= \ln(n+1) - \ln(1) \\
&= \ln(n+1).
\end{aligned}$$

On commence par remarquer que

$$\left(1 - \frac{1}{k\hat{}2}\right) = \frac{k\hat{}2 - 1}{k\hat{}2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k\hat{}2}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\prod_k = 2\hat{}n\left(1 - \frac{1}{k\hat{}2}\right) &= \frac{\prod_k = 2\hat{}n(k-1)\prod_k = 2\hat{}n(k+1)}{(\prod_k = 2\hat{}nk)\hat{}2} \\
&= \frac{(n-1)! \times \frac{1}{2} \times (n+1)!}{(n!)\hat{}2} \\
&= \frac{n+1}{2n}.
\end{aligned}$$

On commence par remarquer que

$$\frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}.$$

On raisonne alors exactement comme pour la première somme :

$$\begin{aligned}
\sum_k = 0\hat{}n\frac{1}{(k+2)(k+3)} &= \sum_k = 0\hat{}n\frac{1}{k+2} - \sum_k = 0\hat{}n\frac{1}{k+3} \\
&= \sum_k = 0\hat{}n\frac{1}{k+2} - \sum_k = 1\hat{}n+1\frac{1}{k+2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}.
\end{aligned}$$

Exercice 9

(3420)

Dans cet exercice, il faut faire très attention aux notations, puis appliquer la formule de la somme d'une série géométrique. Il vient alors

$$\sum \_k = 0\hat{}2nu\_k = \sum \_k = 0\hat{}2n(-2)\hat{}k = \frac{1-(-2)\hat{}2n+1}{1-(-2)} = \frac{1+2\hat{}2n+1}{3}.$$

$$\sum \_k = 0\hat{}2n+1u\_k = \frac{1-2\hat{}2n+2}{3}.$$

$$\sum \_k = 0\hat{}nu\_2k = \sum \_k = 0\hat{}n4\hat{}k = \frac{1-4\hat{}n+1}{1-4} = \frac{4\hat{}n+1-1}{3}.$$

$$\sum \_k = 0\hat{}2n(u\_k+n) = \sum \_k = 0\hat{}2nu\_k + \sum \_k = 0\hat{}2nn = \frac{1+2\hat{}2n+1}{3} + n(2n+1).$$

$$\left(\sum \_k = 0\hat{}2nu\_k\right) + n = \frac{1+2\hat{}2n+1}{3} + n.$$

$$\sum \_k = 0\hat{}nu\_k + n = \sum \_k = 0\hat{}n(-2)\hat{}k + n = (-2)\hat{}n \sum \_k = 0\hat{}n(-2)\hat{}k = \frac{(-2)\hat{}n(1+(-1)\hat{}n+12\hat{}n+1)}{3}$$

$$\sum \_k = 0\hat{}nu\_kn = \sum \_k = 0\hat{}n(-2\hat{}n)\hat{}k = \frac{1-(-2)\hat{}n(n+1)}{1-(-2)\hat{}n},$$

sauf si $n = 0$ auquel cas la somme vaut $u\_0 = 1$.

Exercice 10

(3426)

On sait que

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n\times(n-1)!}{p\times(p-1)!(n-p)!} = \frac{n}{p}\times\frac{(n-1)!}{(p-1)!\big((n-1)-(p-1)\big)!} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$$

On a

$$(n+1)! - n! = (n+1)n! - n! = (n+1-1)n! = n\times n!$$

On a

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = (n+3)(n+2).$$

On a

$$\frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{n+2}{n+1} - 1\right) = \frac{1}{(n+1)!}.$$

On a

$$\frac{u\_n+1}{u\_n} = \frac{a\hat{}n+1}{a\hat{}n} \times \frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{b\hat{}2n}{b\hat{}2n+2} = \frac{a}{(n+1)b\hat{}2}.$$

Exercice 11

(3429)

On va utiliser la formule du binôme. On calcule les coefficients binômiaux par exemple en utilisant le triangle de Pascal. On en déduit

$$(x+1)\hat{}6 = x\hat{}6 + 6x\hat{}5 + 15x\hat{}4 + 20x\hat{}3 + 15x\hat{}2 + 6x + 1.$$

$$(x-1)\hat{}6 = x\hat{}6 - 6x\hat{}5 + 15x\hat{}4 - 20x\hat{}3 + 15x\hat{}2 - 6x + 1.$$

On fait de même, en utilisant $i\hat{}2 = -1$ pour simplifier et regrouper partie réelle et partie imaginaire. Il vient

$$(1+i)\hat{}5 = 1 + 5i - 10 - 10i + 5 + i = -4 - 4i.$$

On aurait aussi pu obtenir ce résultat en mettant le nombre complexe sous forme trigonométrique. De même,

$$(1-i)\hat{}4 = 1 - 4i - 6 + 4i + 1 = -4.$$

Il suffit de remarquer que $2\hat{}n = (1+1)\hat{}n$, et de développer ceci en utilisant la formule du binôme.