Devoir maison n°1

pour lundi 8 septembre 2014

Tous les résultats devront être justifiés, et les affimations démontrées.
Rédigez avec soin mais de manière concise en n'omettant pas les contextes.
Encadrez les résultats.

Exercice 1 (sommes finies)

Soit $n \in \mathbb{N}$, trouver (et démontrer) une expression simple des sommes

a) $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k$

b) $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$

c) $d_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i2^j$

d) $e_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}$

Exercice 2 (Formule de récurrence)

a) Dans un quadrillage infini du plan, tout blanc, considérons au temps 0 un carré noir. Au temps 1, il noircit ses 4 voisins (avec qui il partage un coté). Au temps 2, chacun des 5 carrés noirs noicit ses 4 voisins (si un voisin était noir, il le reste).
Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminez une expression simple de c_n, le nombre de carrés noirs au temps n. Démontrez-la par récurrence.

b)(*) Même question dans un quadrillage de l'espace à 3 dimensions, où un cube a alors 6 voisins avec qui il partage une face : déterminez une expression simple de C_n, le nombre de cubes noirs au temps n.

c)(**) Replaçons-nous dans le plan et son quadrillage blanc, mais avec une nouvelle règle : si on noircit un voisin qui était déjà noir, alors il en devient blanc (de rage...). Déterminer c_n, le nombre de carrés noirs au temps n.

Exercice 3 (démonstration par récurrence)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + 1$$

Montrer que cette suite est strictement croissante.