Corrigé
Devoir maison n°1

pour lundi 8 septembre 2014

Tous les résultats devront être justifiés, et les affimations démontrées.
Rédigez avec soin mais de manière concise en n'omettant pas les contextes.
Encadrez les résultats.

Exercice 1 (sommes finies)

Soit $n \in \mathbb{N}$, trouver (et démontrer) une expression simple des sommes

a) $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k$

Corrigé :

on remarque que $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 3^k$ et par le binôme de Newton, on obtient $\boxed{s_n = (1+3)^n = 4^n}$.

b) $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$

Corrigé :

par télescopage : soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
(n+1)^4 - n^4 &= 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \\
n^4 - (n-1)^4 &= 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1 \\
&\dots \\
2^4 - 1^4 &= 4 + 6 + 4 + 1
\end{aligned}$$

en sommant on obtient

$$\begin{aligned}
(n+1)^4 - 1 &= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)\right) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)((n+1)^3 - 2n^2 - 3n - 1) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - 3n - 1) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)n(n^2 + n) = \frac{1}{4}(n+1)^2 n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$, ce qui est assez remarquable...

c) $d_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j$

Corrigé :

$$d_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} i2^j\right) = \sum_{i=1}^{n} i\left(\sum_{j=1}^{n} 2^j\right) = \sum_{i=1}^{n} i\left(2\sum_{j=0}^{n-1} 2^j\right) = \sum_{i=1}^{n} 2i\frac{2^n-1}{2-1}$$
$$= 2\sum_{i=1}^{n} i(2^n-1) = 2(2^n-1)\sum_{i=1}^{n} i = \boxed{(2^n-1)n(n+1)}$$

d) $e_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}$

Corrigé :

Il s'agit d'une somme triangulaire :

$$\begin{array}{rccccccl}
e_n = & \frac{1}{1} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & \dots & +\frac{1}{n} & (k=1) \\
 & & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & \dots & +\frac{1}{n} & (k=2) \\
 & & & +\frac{1}{3} & \dots & +\frac{1}{n} & (k=3) \\
 & & & & \ddots & \vdots & \\
 & & & & & \frac{1}{n} & (k=n)
\end{array}$$

Combien de fois apparaît le terme $\frac{1}{i}$ dans cette somme double ? Une fois pour chaque $k \leqslant i$, donc i fois. Ainsi

$$e_n = \sum_{i=1}^{n} i \times \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n} 1 = \boxed{n}$$

Étonnant, non ?

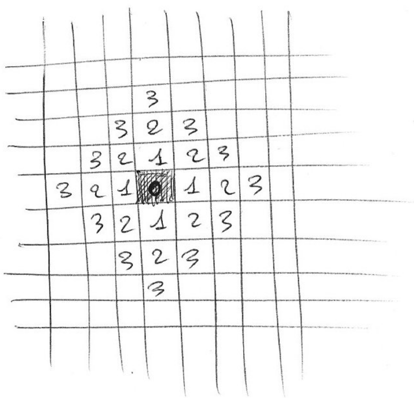
Exercice 2 (Formule de récurrence)

a) Dans un quadrillage infini du plan, tout blanc, considérons au temps 0 un carré noir. Au temps 1, il noircit ses 4 voisins (avec qui il partage un coté). Au temps 2, chacun des 5 carrés noirs noicit ses 4 voisins (si un voisin était noir, il le reste).

Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminez une expression simple de c_n, le nombre de carrés noirs au temps n. Démontrez-la par récurrence.

Corrigé :

un dessin montre que
$$\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = c_n + 4(n+1)$$



dans un carré : le temps où il noircit.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit
$$c_n - c_{n-1} = 4n$$
$$\dots$$
$$c_2 - c_1 = 8$$
$$c_1 - c_0 = 4$$

et en additionnant ces égalités, pas mal de choses se simplifient... et on obtient
$$c_n - c_0 = 4n + 4(n-1) + \ldots + 8 + 4 = 4(n + (n-1) + \ldots + 2 + 1) = 4\frac{n(n+1)}{2}$$

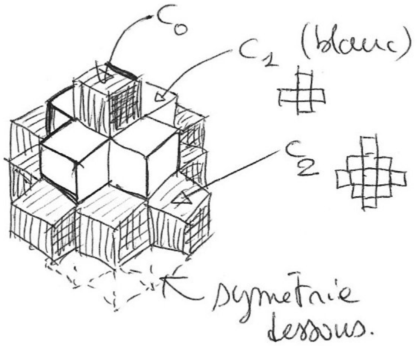
d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, c_n = 2n(n+1) + 1}$

Démontrons-le par récurrence, maintenant :
pour $n = 0$, c'est clair : $c_0 = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $c_n = 2n(n+1)+1$, alors $c_{n+1} = c_n + 4(n+1) = 2n(n+1)+1+4(n+1) = 2n^2+2n+1+4n+4 = 2n^2+6n+5 = 2(n+1)(n+2)+1$, ainsi l'expression de c_{n+1} est démontrée. ∎

b)(*) Même question dans un quadrillage de l'espace à 3 dimensions, où un cube a alors 6 voisins avec qui il partage une face : déterminez une expression simple de C_n, le nombre de cubes noirs au temps n.

Corrigé :

Avec un dessin, par exemple pour $n = 3$:



on voit que l'on empile des tranches de cubes qui correspondent au cas précédent a) dans le plan : ainsi $C_3 = c_3 + 2(c_2 + c_1 + c_0)$ car les tranches sont ajoutées dessus et dessous la grande tranche du milieu.

Donc pour $n \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
C_n &= c_n + 2(c_{n-1} + \ldots + c_0) \\
&= 2n(n+1) + 1 + 2\sum_{k=0}^{n-1}(2k(k+1)+1) \\
&= 2n(n+1) + 1 + 2\sum_{k=0}^{n-1} 1 + 4\sum_{k=0}^{n-1} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n-1} k \\
&= 2n(n+1) + 1 + 2n + 4\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 4\frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{1}{3}(2n+1)(2n^2+2n+3)
\end{aligned}
$$

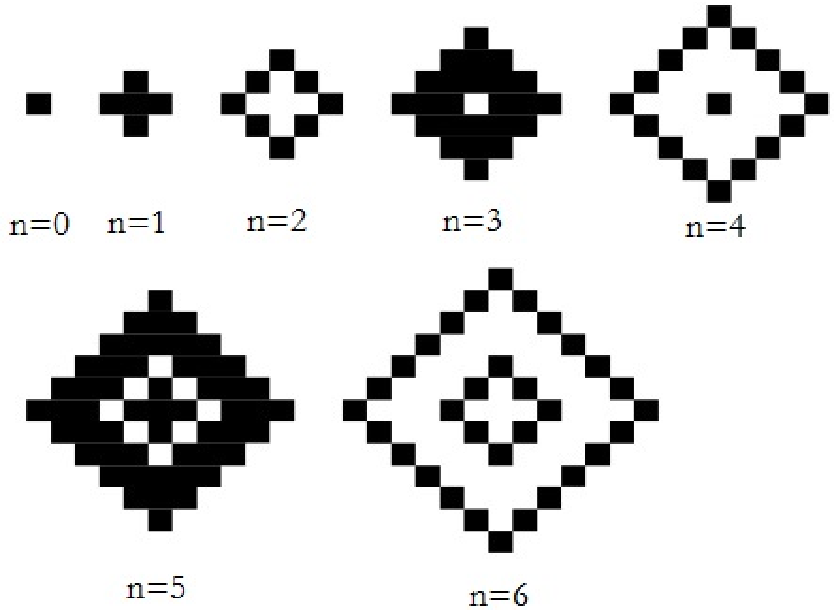
(dans le calcul, on a utilisé la formule $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \frac{1}{3}(2n+1)(2n^2+2n+3)}$.

c)(**) Replaçons-nous dans le plan et son quadrillage blanc, mais avec une nouvelle règle : si on noircit un voisin qui était déjà noir, alors il en devient blanc (de rage...). Déterminer c_n, le nombre de carrés noirs au temps n.

Corrigé :

avec quelques dessins pour $n \leqslant 6$,



on voit qu'une période de 4 se dessine, et qu'il faut distinguer 4 cas : $n = 4k, n = 4k+1, n = 4k+2, n = 4k+3$, dans chacun des cas on a une formule simple qui est un polynôme en n de degré 2. On peut même réutiliser le a), en appelant plutôt c'_n le nombre de carrés noirs dans le cas présent :

$$\boxed{\begin{array}{ll} n = 4k : & c'_n = 1 + \sum_{i=0}^{k} 4(n-4i) = 1 + 16\frac{k(k+1)}{2} = 1 + 8k(k+1) \\ n = 4k+1 : & c'_n = c_n - c'_{n-3} \\ n = 4k+2 : & c'_n = \sum_{i=0}^{k} 4(n-4i) = 16\frac{k(k+1)}{2} + 8(k+1) = 8(k+1)^2 \\ n = 4k+3 : & c'_n = c_n - c'_{n-3} \end{array}}$$

Exercice 3 (démonstration par récurrence)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + 1$$

Montrer que cette suite est strictement croissante.

Corrigé :

il s'agit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$, i.e. $u_{n+1} - u_n > 0$. On a

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + 1 - u_{n+1} = 1 - \frac{u_{n+1} - u_n}{2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_{n+1} - u_n$, alors on a

$$v_{n+1} = 1 - \frac{v_n}{2}$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in]0,1]$.
Pour $n = 0$, $v_0 = u_1 - u_0 = 1 \in]0,1]$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, supposons par hypothèse de récurrence que $v_n \in]0,1]$, et montrons $v_{n+1} \in]0,1]$. On a

$$\begin{aligned} 0 < v_n \leqslant 1 &\Rightarrow 0 < \frac{v_n}{2} \leqslant \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow 0 > -\frac{v_n}{2} \geqslant -\frac{1}{2} \\ &\Rightarrow 1 > 1 - \frac{v_n}{2} \geqslant \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant v_{n+1} < 1 \end{aligned}$$

Ainsi on a bien $v_{n+1} \in]0,1]$, ce qui achève la démonstration par récurrence.

On a bien $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante}}$.

Corrigé 2 : on peut aussi faire une récurrence à 2 pas (ou même une récurrence forte) : montrer $u_0 < u_1$ et $u_1 < u_2$, puis, pout tout $n \in \mathbb{N}$, en supposant $u_n < u_{n+1}$ et $u_{n+1} < u_{n+2}$, montrer $u_{n+2} < u_{n+3}$. Cela revient à montrer par récurrence sur n la propriété P_n : $u_n < u_{n+1}$ *et* $u_{n+1} < u_{n+2}$.