DM3

Instructions de rédaction:

- écrire lisiblement et réserver une marge à gauche, utiliser des copies doubles
- tous les calculs intermédiaires doivent apparaître sur la copie
- les raisonnements doivent être détaillés, chaque déduction doit être justifiée
- un résultat non justifié sera ignoré
- **encadrer** les résultats ainsi que les conclusions des démonstrations.

Exercice 1 : cours (questions indépendantes).

Q1 Écrire avec des quantificateurs le fait qu'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ n'est pas minorée sur A.

Q2 Donner la définition d'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ décroissante sur A.

Q3 Écrire sous forme de somme indicée la somme $S_1 = 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19$

Q4 Avec $n \in \mathbb{N}$, donner la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et la démontrer.

Q5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$|x+3| - |x-1| = |2x-1|$$

Exercice 2 : calculs de sommes (questions indépendantes).

Q6 Pour $n \in \mathbb{N}^*$,donner une expression simple de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 7^k 3^{2n-1-k}$$

Q7 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une expression simple de

$$S_n = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \max(i, j)$$

Exercice 3 : trigonométrie (questions indépendantes).

Q8 Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation

$$\sin x = \cos 2x$$

Q9 Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{6}[$, on a

$$\frac{1 - \cos 2x + \cos 4x - \cos 6x}{\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x} = \tan 3x$$

Q10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x < 2$$

Problème 1 : binôme de Newton.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$$

Q11 Calculer deux expressions différentes de la dérivée de la fonction f définie par

$$f(x) = (x + 1)^n$$

Q12 En déduire S_n.

Q13 Calculer de nouveau S_n en transformant directement l'expression $k \binom{n}{k}$.

Q14 À l'aide d'une des méthodes précédentes, calculer

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k}$$