DM 3 Corrigé

Exo 1

Q1 f minorée sur $A \iff \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leq f(x)$

Donc f non minorée sur $A \iff \text{non}(\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leq f(x))$

$\iff \forall m \in \mathbb{R}, \text{non}(\forall x \in A, m \leq f(x))$

$\iff \forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in A, \text{non}(m \leq f(x))$

$\iff \boxed{\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in A, f(x) < m}$

Q2 f est décroissante sur A ssi $\boxed{\forall x, y \in A, x \leq y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)}$

$\frac{5}{2} \not\leq -3$

Q3 $\boxed{S_1 = \sum_{k=1}^{6} (3k+1)}$

Q4 $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

démonstration : voir le cours.

Q5 posons $f(x) = |x+3| - |x-1| - |2x-1|$

si $x \leq -3$, $f(x) = -x-3+(x-1)+(2x-1) = 2x-5$

si $-3 \leq x \leq 1/2$, $f(x) = x+3+(x-1)+(2x-1) = 4x+1$

si $1/2 \leq x \leq 1$, $f(x) = x+3+(x-1)-(2x-1) = 3$

si $x \geqslant 1$: $f(x) = x+3-(x-1)-(2x-1) = -2x+5$

d'où $\boxed{\text{les solutions } \left\{-\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right\}}$

Exo 2

Q6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$: on a $S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 7^k \times 3^{n-k} \times 3^{n-1} = 3^{n-1}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 7^k 3^{n-k} - \underset{\text{pour } k=0}{3^n}\right]$

donc $S_n = 3^{n-1}\left[(7+3)^n - 3^n\right] = 3^{n-1}(10^n - 3^n)$

ainsi $\boxed{S_n = 3^{n-1}(10^n - 3^n)}$

Q7 ① on remarque que $\max(i,j) + \min(i,j) = i+j$,

donc $\max(i,j) = i+j-\min(i,j)$

donc $S_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (i+j) - \sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i,j)$

or $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (i+j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i+j) = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n} j\right] = \sum_{i=1}^{n} \left(ni + \frac{n(n+1)}{2}\right)$

$= n \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} \frac{n(n+1)}{2} = n\frac{n(n+1)}{2} + n\frac{n(n+1)}{2} = \underline{n^2(n+1)}$

et on a vu en TD : $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i,j) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

donc $S_n = n^2(n+1) - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = n(n+1)\left[n - \frac{2n+1}{6}\right]$

$= n(n+1)\left(\frac{6n-2n-1}{6}\right) = n(n+1)\left(\frac{4n-1}{6}\right)$

donc $\boxed{S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)}$

② autre démonstration, directe :

voici le tableau des valeurs de $\max(i,j)$:

$$\begin{array}{c|cccccc}
{}_i \backslash {}^j & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\
\hline
1 & 1 & 2 & & & n-1 & n \\
2 & 2 & 2 & & & & \\
3 & & & & & & \\
\vdots & & & & \ddots & & \\
n-1 & n-1 & & \text{———} & & n-1 & \\
n & n & n & \cdots & & & n
\end{array}$$

en groupant par "coins" on a

alors $S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)k$

$= 1\times1 + 3\times2 + \dots + (2n-1)n$

donc $S_n = 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k$

$= 2\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{n(n+1)}{6}(4n+2-3)$

d'où $\boxed{S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)}$

$\boxed{\text{Exo 3}}$

Q8 on a $\sin x = \cos 2x \iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos 2x \iff \frac{\pi}{2} - x = 2x + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ ou $\frac{\pi}{2} - x = -2x + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\iff \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$, or $x\in[0, 2\pi]$,

on a $0 \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \leq 2\pi \iff -\frac{\pi}{6} \leq \frac{2k\pi}{3} \leq \frac{11\pi}{6} \iff -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{11}{4}$

et $0 \leq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2\pi \iff \frac{\pi}{2} \leq 2k\pi \leq \frac{5\pi}{2} \iff \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{5}{4}$

or dans les 2 cas, $k\in\mathbb{Z}$ donc $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k\in\{0,1,2\} \\ \text{ou } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k\in\{1\} \end{cases}$

d'où l'ensemble des solutions est

$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}}$

(car $\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi$)

Q9 on a $1-\cos 6x = 1-(1-2\sin^2 3x) = 2\sin^2 3x$

$\cos 4x - \cos 2x = -2\sin\frac{4x+2x}{2}\sin\frac{4x-2x}{2} = -2\sin 3x \sin x$

$\sin 2x - \sin 4x = 2\cos\frac{2x+4x}{2}\sin\frac{2x-4x}{2} = -2\cos 3x \sin x$

$\sin 6x = 2\sin 3x \cos 3x$

donc $A = \dfrac{1-\cos 2x + \cos 4x - \cos 6x}{\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x} = \dfrac{2\sin^2 3x - 2\sin 3x \sin x}{-2\cos 3x \sin x + 2\sin 3x \cos 3x}$

$= \dfrac{2\sin 3x(\sin 3x - \sin x)}{2\cos 3x(\sin 3x - \sin x)}$

A est donc définie ssi $\cos 3x \neq 0$ et $\sin 3x - \sin x \neq 0$

on a $\cos 3x = 0 \iff 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \iff x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

et $\sin 3x = \sin x \iff \begin{cases} 3x = x + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 3x = \pi - x + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} x = k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

Si $x \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right[$, alors $x \notin \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

et $x \notin \{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ ainsi que $x \notin \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

donc A est bien défini : on peut simplifier par $2(\sin 3x - \sin x)$ qui est $\neq 0$:

Et on a alors $\boxed{A = \dfrac{\sin 3x}{\cos 3x} = \tan 3x}$

Q10 on a $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x + \frac{1}{2}(\cos 3x)\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)$

donc l'inéquation devient $2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) < 2$

$\iff \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) < 1 \iff \frac{\pi}{3} - 3x \neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ (car $\cos x < 1 \iff \cos x \neq 1$)

$\iff x \neq \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

l'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{S = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}}$$

Problème 1

Q11 on a $\left((x+1)^n\right)' = n(x+1)'(x+1)^{n-1}$ par $(g^n)' = n g' g^{n-1}$

donc $\boxed{f'(x) = n(x+1)^{n-1}}$

mais $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ donc $\boxed{f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}}$ (car $(x^0)'=0$)

on a les deux expressions demandées.

Q12 prenons $x=1$ dans Q11 : ainsi $f'(1) = n2^{n-1}$

et $f'(1) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = S_n$

d'où $\boxed{S_n = n2^{n-1}}$

Q13 on a (si $k \geqslant 1$) $k\binom{n}{k} = k\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} = \dfrac{n!}{(n-k)!(k-1)!} = n\dfrac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!}$

donc $\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}$, d'où $S_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$

$$= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \underset{k'=k-1}{=} \sum_{k'=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k'} \underset{\text{renommage de } k' \text{ en } k}{=} \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}$$

$= n(1+1)^{n-1} = \boxed{n2^{n-1}}$ $\square$

Q14 1ère méthode : on calcule $f''(x)$: $f''(x) = n(n-1)(x+1)^{n-2}$

$= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2}$

$T_n = f''(1)$ donc $\boxed{T_n = n(n-1)2^{n-2}}$

2ème méthode :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} = \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\frac{(n-2)!}{(n-2-(k-2))!(k-2)!}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} = \sum_{k=0}^{n-2} n(n-1)\binom{n-2}{k} = \boxed{n(n-1)2^{n-2}}$$