

# Trigonométrie

## Prérequis

Relation  $\cos^2 + \sin^2 = 1$ . Symétrie et périodicité de sin et cos.  
Formules d'addition et de duplication. Fonction tangente.

Dans toute cette fiche,  $x$  désigne une quantité réelle.

## Valeurs remarquables de cosinus et sinus

### Calcul 7.1



Simplifier :

a)  $\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4}$  .

c)  $\tan \frac{2\pi}{3} + \tan \frac{3\pi}{4} + \tan \frac{5\pi}{6} + \tan \frac{7\pi}{6}$

b)  $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{7\pi}{6}$  .....

d)  $\cos^2 \frac{4\pi}{3} - \sin^2 \frac{4\pi}{3}$  .....

## Propriétés remarquables de cosinus et sinus

### Calcul 7.2



Simplifier :

a)  $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$  .....

c)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$  .....

b)  $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

d)  $\cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$  .....

## Formules d'addition

### Calcul 7.3



Calculer les quantités suivantes.

a)  $\cos \frac{5\pi}{12}$  (on a  $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$ ) .....

c)  $\sin \frac{\pi}{12}$  .....

b)  $\cos \frac{\pi}{12}$  .....

d)  $\tan \frac{\pi}{12}$  .....

### Calcul 7.4



a) Simplifier :  $\sin(4x) \cos(5x) - \sin(5x) \cos(4x)$  .....

b) Simplifier :  $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}$  (pour  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ) .....

c) Simplifier :  $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$  .....

d) Expliciter  $\cos(3x)$  en fonction de  $\cos x$  .....

## Formules de duplication

### Calcul 7.5



En remarquant qu'on a  $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$ , calculer :

a)  $\cos \frac{\pi}{8}$  .....

b)  $\sin \frac{\pi}{8}$  .....

### Calcul 7.6



a) Simplifier :  $\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$  (avec  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ) .....

b) Simplifier :  $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$  (pour  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ) .....

c) Expliciter  $\cos(4x)$  en fonction de  $\cos x$  .....

## Équations trigonométriques

### Calcul 7.7



Résoudre dans  $[0, 2\pi]$ , dans  $[-\pi, \pi]$ , puis dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a)  $\cos x = \frac{1}{2}$  .....

f)  $|\tan x| = \frac{1}{\sqrt{3}}$  .....

b)  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  .....

g)  $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  .....

c)  $\sin x = \cos \frac{2\pi}{3}$  .....

h)  $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$  .....

d)  $\tan x = -1$  .....

i)  $\cos x = \cos \frac{\pi}{7}$  .....

e)  $\cos^2 x = \frac{1}{2}$  .....

j)  $\sin x = \cos \frac{\pi}{7}$  .....

## Inéquations trigonométriques

### Calcul 7.8



Résoudre dans  $[0, 2\pi]$ , puis dans  $[-\pi, \pi]$ , les inéquations suivantes :

a)  $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$  .....

e)  $\tan x \geq 1$  .....

b)  $\cos x \leq \cos \frac{\pi}{3}$  .....

f)  $|\tan x| \geq 1$  .....

c)  $\sin x \leq \frac{1}{2}$  .....

g)  $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$  .....

d)  $|\sin x| \leq \frac{1}{2}$  .....

h)  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$  .....

Réponses mélangées

$$\begin{array}{l}
 2 \cos x \quad 0 \quad \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\} \quad \left[ 0, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{6}, 2\pi \right] \quad \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\} \quad \left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] \\
 \left[ 0, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right] \cup \left[ \frac{11\pi}{6}, 2\pi \right] \quad \left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} \right\} \quad -\sin x \quad 0 \quad \left\{ -\frac{11\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \right\} \\
 \left\{ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left\{ -\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7} \right\} \quad \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\} \quad \left\{ \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\} \\
 \left\{ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\} \quad \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \\
 0 \quad \left\{ \frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14} \right\} \quad \left[ 0, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{7\pi}{4}, 2\pi \right] \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \left[ 0, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{4}, 2\pi \right] \quad 0 \\
 \left\{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\} \quad \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \quad \left\{ -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} \right\} \quad \left[ -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] \quad -\sin x \quad -2 \cos x \\
 \left[ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[ -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \quad \left[ -\pi, -\frac{\pi}{3} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{3}, \pi \right] \quad \left[ -\pi, -\frac{5\pi}{8} \right] \cup \left[ -\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \right] \cup \left[ \frac{7\pi}{8}, \pi \right] \\
 \left\{ \frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right] \cup \left[ \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4} \right] \\
 \left\{ -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\} \quad \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right] \quad 2 \quad \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \quad \left[ 0, \frac{3\pi}{8} \right] \cup \left[ \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8} \right] \cup \left[ \frac{15\pi}{8}, 2\pi \right] \\
 \left\{ \frac{\pi}{7}, \frac{13\pi}{7} \right\} \quad \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\} \quad \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\
 \left[ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \quad \left\{ -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\} \quad \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\} \quad -1 - \sqrt{3} \\
 \left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\} \quad \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\} \quad 4 \cos^3 x - 3 \cos x \quad \left[ -\pi, -\frac{5\pi}{6} \right] \cup \left[ -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{6}, \pi \right] \\
 \left\{ \frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14} \right\} \quad \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left[ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right] \quad \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} \quad 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1 \\
 \left\{ \frac{5\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{9\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left[ -\pi, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{6}, \pi \right] \quad \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan x \\
 \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\} \quad \left\{ \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \frac{1}{\cos x} \quad \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 96



# Exponentielles

## Calcul 8.5



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a)  $e^{3 \ln 2}$  .....

d)  $e^{-2 \ln 3}$  .....

b)  $\ln(\sqrt{e})$  .....

e)  $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$  .....

c)  $\ln(e^{\frac{1}{3}})$  .....

f)  $e^{\ln 3 - \ln 2}$  .....

## Calcul 8.6



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a)  $-e^{-\ln \frac{1}{2}}$  .....

d)  $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$  .....

b)  $e^{-\ln \ln 2}$  .....

e)  $\ln(\sqrt{\exp(-\ln e^2)})$  .....

c)  $\ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$  .....

f)  $\exp\left(-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})\right)$  .....

# Études de fonctions

## Calcul 8.7 — Parité.



Étudier la parité des fonctions suivantes.

a)  $f_1 : x \mapsto \ln \frac{2021 + x}{2021 - x}$  .....

b)  $f_2 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  .....

c)  $f_3 : x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$  .....

d)  $f_4 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$  .....

## Calcul 8.8 — Étude d'une fonction.



Soit  $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction. ....

b) Montrer que pour tous réels  $a$  et  $b$  on a  $f(a + b) = \frac{f(a) + f(b)}{1 + f(a)f(b)}$ . ....

c) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . ....

d) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ . ....

**Calcul 8.9**



On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x). \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout  $x \in \mathbb{R}$  pour lequel elles sont définies.

- a)  $f(2e^x - 1)$  .....       d)  $xf'(x) - 1$  .....
- b)  $e^{x - \frac{1}{2}f(x)}$  .....       e)  $e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$  .....
- c)  $\frac{1}{2}f(x^2 - 2x)$  .....

## Équations, inéquations

**Calcul 8.10**



Résoudre les équations et inéquations suivantes (d'inconnue  $x$ ).

- a)  $e^{3x-5} \geq 12$  .....
- b)  $1 \leq e^{-x^2+x}$  .....
- c)  $e^{1+\ln x} \geq 2$  .....
- d)  $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$  .....
- e)  $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$  .....
- f)  $\ln(-x-5) = \ln \frac{x-61}{x+7}$  .....

**Réponses mélangées**

$\ln 3 + 11 \ln 2$	$\emptyset$	$\frac{-13 - \sqrt{273}}{2}$	$e$	$\frac{1}{2} \ln 2$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$	$-1$	$\frac{1}{9}$
$2 \ln 5 - 2 \ln 2$	impaire	$\ln  x-1 $	$0$	impaire	$x + \ln 2$	$-2 \ln 5 + 4 \ln 2$		
impaire	$\frac{1}{3}$	$3 \ln 2$	$1$	$-17$	$1$	$\frac{1}{\ln 2}$	$\frac{3}{2}$	ok
$17 + 12\sqrt{2}$	$(1+x)^x$	$-2$	$-2 \ln 2 - 2 \ln 5$	$9 \ln 2$	impaire	$8$	$2 \ln 2 + 2 \ln 3$	
$-3 \ln 2$	$x \geq \frac{\ln 12 + 5}{3}$	$\frac{1}{2}$	$x \geq \frac{2}{e}$	$\frac{25}{8} \ln(\sqrt{2}-1)$	$0$	$-\frac{1}{1+x}$		
$\mathbb{R}$	$-1$	$2 \ln 3 - 2 \ln 2$	$4 \ln 2$	$3 \ln 5 + 2 \ln 2$	$-\ln 3 - 2 \ln 2$	$x \in [0, 1]$		

► Réponses et corrigés page 99