PCSI2, mathématiques : devoir surveillé n°1

Samedi 21 septembre 2024
Durée 2 heures.
Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice 0 (sur 5 points)

Instructions de présentation.

1. Sur la première page : indiquer **dans l'ordre de l'énoncé** la **page de début de chaque exercice**.
2. Commencer chaque exercice en haut d'une **nouvelle page**.
3. Séparer les questions par un **trait horizontal** de la largeur de la page.
4. **Encadrer les résultats.**

Exercice 1 : questions de cours.

Q1 A étant une partie de $\mathbb{R}$, donner la définition d'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ strictement croissante sur A.

Q2 Écrire sous forme de somme indicée la somme $S = 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22$

Q3 Pour a et b des réels, donner la factorisation de $a^n - b^n$, sans la démontrer.

Q4 Avec $n \in \mathbb{N}$, donner la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ sans la démontrer.

Q5 Tracer le triangle de Pascal avec les valeurs de $\displaystyle\binom{n}{p}$ pour $0 \leqslant n, p \leqslant 5$.

Exercice 2 : résolution d'équations et d'inéquations.

Q1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x-2| - |x+1| = 3$

Q2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} \geqslant 1$

Exercice 3 : sommes

Les questions 1, 2, et 3 sont indépendantes.

Q1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $\displaystyle A_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et $\displaystyle B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

Q1.a Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $A_{n+1} - A_n$

Q1.b Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $B_{n+1} - B_n = A_{n+1} - A_n$

Q1.c En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = B_n$

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i 2^j$.

Q3 Pour $n \in \mathbb{N}^*$,donner une expression simple de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k 7^{2n-1-k}$$

Exercice 4 : trigonométrie.

(Les questions sont indépendantes)

Q1 Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation $\sin x = \cos(2x)$

Q2 Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'équation $\cos(5x) + \sin(5x) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$
Indication : diviser de chaque côté par $\sqrt{2}$ et reconnaître le sinus d'une somme.

Q3 Calculer

$$\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right), \quad \arccos\left(\cos\frac{-2\pi}{3}\right), \quad \arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right).$$

Problème : fonctions circulaires.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x)(\cos x)^2$.

Q1 Déterminer la parité éventuelle de f.

Q2 Montrer que f est π-périodique.

Q3 Déterminer I, un intervalle d'étude de f aussi réduit que possible.

Q4 Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, déterminer sa dérivée et le signe de sa dérivée.

Q5 Dresser le tableau de variations de f sur I.

Q6 Tracer l'allure de la courbe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. On utilisera toute la largeur de la page.

Q7 Pour $x \in \mathbb{R}$, linéariser $f(x)$, i.e. l'exprimer comme une somme de sinus et de cosinus sans produit.

Q8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = f(-x)$.