# DS1 corrigé

## Exercice 1

**Q2** $S = \sum_{k=0}^{5} 7+3k$ pour le reste des questions, voir le cours.

## Exercice 2 :

appelons (*) l'équation ou l'inéquation.

**Q1** 4 cas :

si $x-2 \geq 0$ i.e. $x \geq 2$

si $x+1 \geq 0$, i.e. $x \geq -1$ alors $(*) \Leftrightarrow x-2-(x+1)=3$

$\Leftrightarrow \cancel{x}-2-\cancel{x}-1=3 \Leftrightarrow -3=3$ : FAUX, donc pas de solution

si $x+1 \leq 0$ : i.e. $x \leq -1$ : pas de solution, car $x \geq 2$ ...

si $x-2 \leq 0$ : i.e. $x \leq 2$

si $x+1 \geq 0$ : i.e. $x \geq -1$ alors $(*) \Leftrightarrow -(x-2)-(x+1)=3$

$\Leftrightarrow -x+2-x-1=3 \Leftrightarrow -2x+1=3 \Leftrightarrow -2x=2$

$\Leftrightarrow$ $x=-1$ qui vérifie bien $x \leq 2$ et $x \leq 1$

si $x+1 \leq 0$ : i.e. $x \leq -1$ alors $(*) \Leftrightarrow -(x-2)-(-(x+1))=3$

$\Leftrightarrow -x+2+x+1=3 \Leftrightarrow 3=3$ : Vrai

donc $x$ solution si $x \leq 2$ et $x \leq -1$, i.e. $x \leq -1$

Donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (*) \text{ est } ]-\infty,-1]}$

**Autre correction :**

si $x \leq -1$ : alors $x-2 \leq 0$ et $x+1 \leq 0$ donc $(*) \Leftrightarrow -(x-2)-(-(x+1))=$

$\Leftrightarrow -\cancel{x}+2+\cancel{x}+1=3 \Leftrightarrow 3=3$ donc vraie.

si $-1 \leq x \leq 2$ : $(*) \Leftrightarrow -(x-2)-(x+1)=3 \Leftrightarrow -x+2-x-1=3$

$\Leftrightarrow -2x=2 \Leftrightarrow x=-1$

si $2 \leq x$ : $(*) \Leftrightarrow x-2-(x+1)=3 \Leftrightarrow \cancel{x}-2-\cancel{x}-1=3$

$\Leftrightarrow -3=3$ faux.

ainsi $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (*) \text{ est } ]-\infty,-1]}$

**Q2** on veut $x+5 \geq 0$ et $x-3 \geq 0$, donc $x \geq -5$ et $x \geq 3$, i.e. $x \geq 3$

Pour $x \geq 3$, on a $(*)$ $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} \geq 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+5} \geq 1+\sqrt{x-3}$

$\Leftrightarrow x+5 \geq 1+(x-3)+2\sqrt{x-3}$ car les termes sont positifs

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-3} \leq 7$

$\Leftrightarrow x-3 \leq \left(\frac{7}{2}\right)^2$ car

$\Leftrightarrow x \leq \frac{49}{4}+3=\frac{49+12}{4}=\frac{61}{4}$, or $x \geq 3$,

ainsi $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (*) \text{ est } [3,\tfrac{61}{4}]}$

# Exercice 3

**Q1 a)**

on a $A_{n+1}-A_n = \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n+2}\frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$

$$= \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = \frac{-1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{-(2n+1)+(2n+2)}{(2n+2)(2n+1)} = \boxed{\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}}$$

**Q1.b** on a $B_{n+1}-B_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(n+1)+k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

$$= \sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

avec le changement d'indice $k'=k+1$ dans la première somme, puis en changeant $k'$ en $k$.

$$= \frac{1}{n+n+2}+\frac{1}{n+n+1}-\frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2(n+1)} = \frac{2n+2-(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} = A_{n+1}-A_n \quad \square$$

**Q1.c** par récurrence sur $n$ :

**Init.** on a $A_1 = \sum_{k=1}^{2}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^2}{1}+\frac{(-1)^3}{2} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

et $B_1 = \sum_{k=1}^{1}\frac{1}{1+k} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

donc $A_1 = B_1$

**Hérédité.** supposons $A_n = B_n$, on a $A_{n+1}-A_n = B_{n+1}-B_n$

donc $A_{n+1}-A_n+A_n = B_{n+1}-B_n+A_n = B_{n+1}-B_n+B_n$

donc $A_{n+1} = B_{n+1}$ $\square$

**Q2)** on a $S_n = \sum_{i=1}^{n} i\left(\sum_{j=1}^{n} 2^j\right) = \sum_{i=1}^{n} i\left(\sum_{j=0}^{n} 2^j - 1\right) = \sum_{i=1}^{n} i\left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1}-1\right)$

$$= (2^{n+1}-2)\sum_{i=1}^{n} i = (2^{n+1}-2)\frac{n(n+1)}{2}$$

donc $\boxed{S_n = (2^n-1)n(n+1)}$

**Q3** on a $S_n = 7^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k 7^{n-k} = 7^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k 7^{n-k} - \binom{n}{0}3^0 7^{n-0}\right)$

$$= 7^{n-1}\left((3+7)^n - 7^n\right)$$

$$\boxed{= 7^{n-1}\left(10^n - 7^n\right)}$$

## Exercice 4

**Q1** on a $\sin x = \cos(2x) \iff \sin x = 1 - 2\sin^2 x \iff 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$\iff (2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0 \iff \sin x = \frac{1}{2}$ ou $\sin x = -1$

or on résoud sur $[0, 2\pi]$

donc $\sin x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

$\sin x = -1 \iff x = \frac{3\pi}{2}$

$\boxed{\text{donc l'ensemble des solutions est } \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}}$

**Q2** on a (*) $\cos 5x + \sin 5x = \frac{\sqrt{6}}{2} \iff \cancel{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 5x\right) = \cancel{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\iff \sin\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = \sin\frac{\pi}{3}$

$\iff \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} + 5x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ \frac{\pi}{4} + 5x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - 3\pi}{12}$

$\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi -}{12}$

$\iff \left[\begin{array}{l} 5x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } 5x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

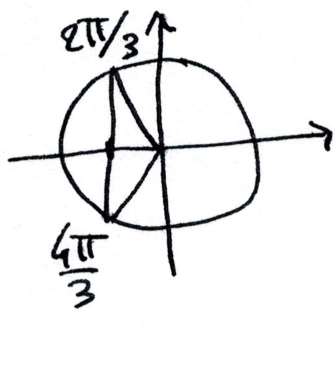
$\iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{60} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (*) \text{ est } \left\{\frac{\pi}{60} + 2k\frac{\pi}{5} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{12} + 2k\frac{\pi}{5} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}}$

**Q3** $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$ car $\frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$

$\arccos\left(\cos\frac{-2\pi}{3}\right) \underset{\cos \text{ pair}}{=} \arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$

$\arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$



# Exercice

**Q1)** pour $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \sin(-2x)\cos^2(-x) = -\sin(2x)\cos^2 x = -f(x)$

donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$

**Q2)** pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x+\pi) = \sin(2(x+\pi))\cos^2(x+\pi)$

$= \sin(2x+2\pi)\,(-\cos x)^2$

$= \sin 2x \cos^2 x = f(x)$

donc $\boxed{f \text{ est } \pi\text{-périodique.}}$

**Q3)** on va étudier $f$ sur $\boxed{I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$ : par imparité de $f$ on déduira $f$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, qui est de longueur $\pi$, et le reste par périodicité.

**Q4)** $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée de fonctions dérivables sur leurs ensembles de définition et pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = (\sin 2x)'\cos^2 x + \sin 2x\,(\cos^2 x)'$

$= 2\cos 2x \cos^2 x + \sin 2x\,(2(-\sin x)\cos x)$ $\qquad ((g^n)' = n g' g^{n-1})$

$= 2\cos x\,(\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x)$

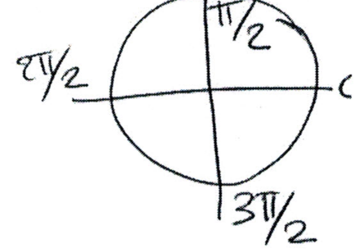
$= 2\cos x\,\cos(2x + x)$

ainsi $\boxed{f'(x) = 2\cos x \cos 3x}$

pour $x \in [0, \pi/2] = I$, on a $\cos x \geq 0$, et $3x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

donc $\cos 3x \geq 0$ ssi $3x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\iff x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$




ainsi $\boxed{f'(x) \geq 0 \iff x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]}$

**Q5)**

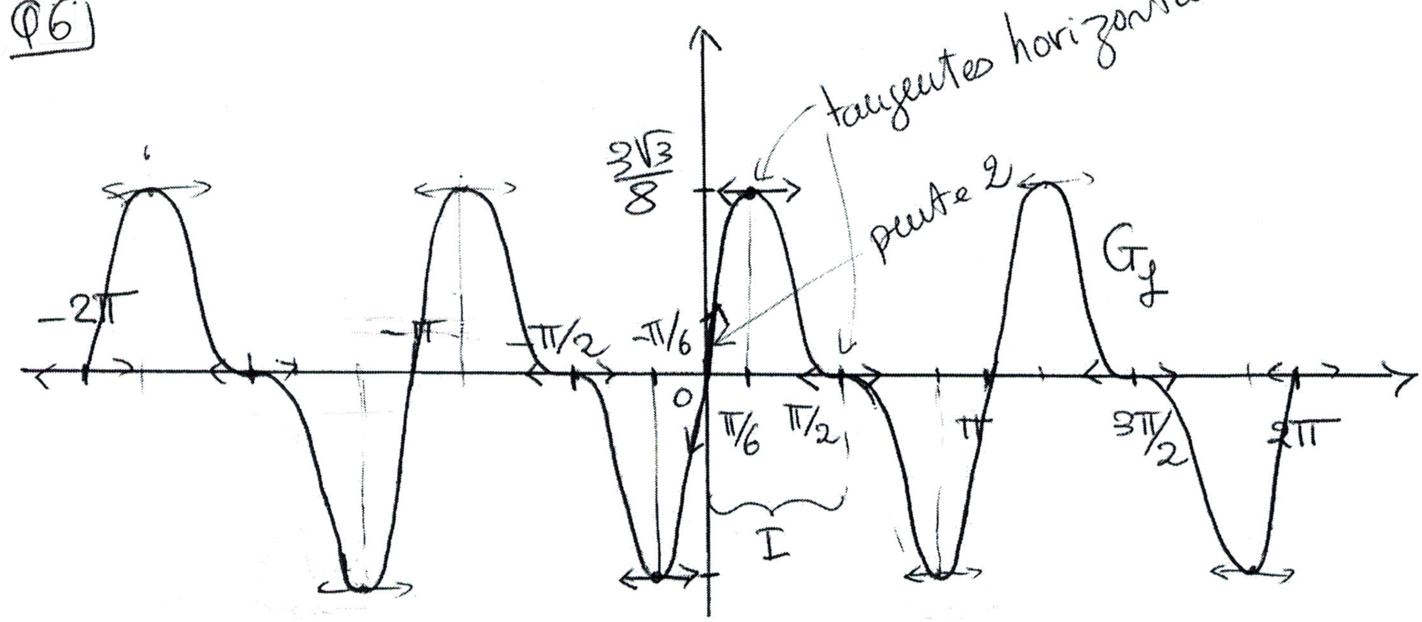
| $x$ | $0$ | | $\pi/6$ | | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $2$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $0$ |

$f(\pi/6) = \sin\frac{\pi}{3}\cos^2\frac{\pi}{6}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8} <$

$f(\pi/2) = 0$

**Q6)**




**Q7)** on a $\sin 2x \cos^2 x = \sin 2x \, \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 2x \cos 2x$

donc $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

(car $\sin 4x = \sin 2(2x)$
$= 2\sin(2x)\cos(2x)$)

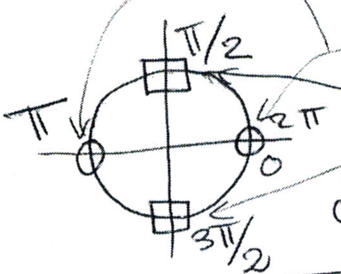
**Q8)** on a $f(x) = f(-x) \iff f(x) = -f(x)$ car $f$ impaire

$\iff 2f(x) = 0 \iff f(x) = 0$

$\iff \sin 2x = 0$ ou $\cos x = 0$

$\iff$ ① $2x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

ou ② $x = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$




donc $\iff x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

corriger dans l'énoncé !

$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } f(x) = f(-x) \text{ est donc } \left\{ \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}}$

(ce qui se voit sur la courbe de $f$ !)