

Sommes et produits

Prérequis

Factorielle. Identités remarquables. Décomposition en éléments simples.
Fonctions usuelles (racine carrée, logarithme népérien).

Rappel

Si q est un nombre réel, si $m, n \in \mathbb{N}^*$ et si $m \leq n$, on a

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{k=m}^n k &= \frac{(n-m+1)(m+n)}{2} & \bullet \sum_{k=1}^n k^3 &= \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ \bullet \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \bullet \sum_{k=m}^n q^k &= \begin{cases} q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Calculs de sommes simples

Calcul 9.1



Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=1}^{n+2} n$

c) $\sum_{k=1}^n (3k+n-1)$

b) $\sum_{k=2}^{n+2} 7k$

d) $\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-4}{3} \right)$

Calcul 9.2



Même exercice.

a) $\sum_{k=1}^n k(k+1)$

d) $\sum_{k=0}^n 2^k 5^{n-k}$

b) $\sum_{k=0}^n (4k(k^2+2))$

e) $\sum_{k=1}^n (7^k + 4k - n + 2)$

c) $\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$

f) $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$

Calcul 9.3 — Produits.



Calculer les produits suivants, où p et q sont des entiers naturels non nuls tels que $p \geq q$.

a) $\prod_{k=p}^q 2$

c) $\prod_{k=1}^n 5\sqrt{k} \times k$

b) $\prod_{k=1}^n 3^k$

d) $\prod_{k=-10}^{10} k$

Avec des changements d'indice

Calcul 9.4



Calculer les sommes suivantes en effectuant le changement d'indice demandé.

- a) $\sum_{k=1}^n n+1-k$ avec $j = n+1-k$
- b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$ avec $j = n+1-k$
- c) $\sum_{k=1}^n k2^k$ avec $j = k-1$
- d) $\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3$ avec $j = k-2$

Sommes et produits télescopiques

Calcul 9.5 — Sommes télescopiques.



Calculer les sommes suivantes.

- a) $\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3$
- b) $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$
- c) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$
- d) $\sum_{k=1}^n k \times k!$

Calcul 9.6 — Produits télescopiques.



Calculer les produits suivants.

- a) $\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k}$
- b) $\prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k-3}$
- c) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$
- d) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

À l'aide d'une décomposition en éléments simples

Calcul 9.7



Calculer les sommes suivantes.

- a) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$
- b) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+2)(k+3)}$

Sommation par paquets

Calcul 9.8



Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$

b) $\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$

Sommes doubles

Calcul 9.9



Calculer les sommes doubles suivantes.

a) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} j$

b) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$

c) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j)$

d) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i + j)^2$

e) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \ln(i^j)$

f) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 \frac{9}{2}(3^{n-2} - 1) & 2^{q-p+1} & \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3} & 1 - \frac{1}{n+1} & \frac{n^2(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)(7n^2 + 13n + 4)}{12} & \\
 \frac{n(5n+1)}{2} & \frac{1}{n} & (n+1)! - 1 & 5^n (n!)^{\frac{3}{2}} & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{7(n+1)(n+4)}{2} & 2n^2 + n \\
 \frac{n(3n+1)}{2} & n(n+2) & 1 - 4n^2 & \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} & 1 - \frac{1}{(n+1)!} & \ln(n+1) & \\
 \frac{n(n+1)}{2} \ln(n!) & n(n+1)(n^2 + n + 4) & \frac{n(n^2 - 1)}{2} & \frac{(n-2)(n-7)}{6} & \frac{n+1}{2n} & & \\
 n+1 & \frac{n+1}{2n} & \frac{n(n+3)}{4} & \frac{7}{6}(7^n - 1) + n(n+4) & \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3} & 3^{\frac{n(n+1)}{2}} & \\
 (n+3)^3 - 2^3 & 0 & \frac{n(n+1)(n+2)}{3} & 0 & n2^{n+1} + 2(1 - 2^n) & \frac{n^2(n+1)^2}{4} &
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 101

Coefficients binomiaux

Prérequis

Factorielle. Coefficients binomiaux. Formule du binôme de Newton.

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Manipulations de factorielles et de coefficients binomiaux

Calcul 10.1 — Pour s'échauffer.



Donner la valeur des expressions suivantes :

a) $\frac{101!}{99!}$

d) $\binom{6}{2}$

b) $\frac{10!}{7!}$

e) $\binom{8}{3}$

c) $\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}$

f) $4 \times \binom{7}{4}$

Calcul 10.2 — Pour s'échauffer — bis.



Écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles, de coefficients binomiaux et, le cas échéant, à l'aide de puissances.

a) $6 \times 7 \times 8 \times 9$

c) $2 \times 4 \times \dots \times (2n)$

b) $\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4}$

d) $3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)$...

Calcul 10.3 — Avec des paramètres.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre k désigne un entier naturel tel que $k < n$.

a) $\binom{n}{2}$ (pour $n \geq 2$)

d) $\frac{(n+2)!}{n!}$

b) $\binom{n}{3}$ (pour $n \geq 3$)

e) $\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}$

c) $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$

f) $\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}}$

Calcul 10.4 — Avec des paramètres — bis.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre a désigne un nombre non nul.

a) $\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!}$

b) $\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \frac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3}$

Autour du binôme de Newton

Calcul 10.5



Calculer les sommes ci-dessous à l'aide de la formule du binôme de Newton.

- | | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}$ <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/> | c) $\sum_{k=0}^n 2^{2n-k} \binom{n}{k}$ <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/> |
| b) $\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$ <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/> | d) $\sum_{k=0}^n 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$ <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/> |

Calcul 10.6



- a) Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton $(1 + 1)^n + (1 - 1)^n$
- b) Calculer $\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$

Calcul 10.7



En utilisant la fonction $x \mapsto (1 + x)^n$, ses dérivées d'ordre 1 et 2 et sa primitive s'annulant en 0, calculer

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/> | c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k^2$ <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/> |
| b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k$ <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/> | d) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$ <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/> |

Calcul 10.8



- a) Donner le coefficient de x^n dans le développement de $(1 + x)^{2n}$
- b) En donner une autre expression en développant le produit $(1 + x)^n(1 + x)^n$
- c) Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$

Réponses mélangées

$2 \times \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$	$\binom{2n}{n}$	$\frac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}$	$(n+2)(n+1)$	2^{n-1}	$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$
3^n	$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$	10 100	$n2^{n-1}$	$n(n+1)2^{n-2}$	$\frac{k+1}{n-k}$
2^n	$\binom{9}{4}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}$	720	56
$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$	$\frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$	140	$\binom{2n}{n}$	$\frac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}$
					12×15^n
					$6^n \frac{9!}{5!}$
					$2^n \times n!$
					0

► Réponses et corrigés page 106

Nombres complexes

Prérequis

Forme algébrique et forme exponentielle.

Pour s'échauffer

Calcul 11.1 — Écriture algébrique.



Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

- | | | | |
|-----------------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------|
| a) $(2 + 6i)(5 + i)$ | <input type="text"/> | e) $(2 - 3i)^4$ | <input type="text"/> |
| b) $(3 - i)(4 + i)$ | <input type="text"/> | f) $\frac{1}{3 - i}$ | <input type="text"/> |
| c) $(4 - 3i)^2$ | <input type="text"/> | g) $\frac{2 - 3i}{5 + 2i}$ | <input type="text"/> |
| d) $(1 - 2i)(1 + 2i)$ | <input type="text"/> | h) $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ | <input type="text"/> |

Calcul 11.2 — Forme exponentielle.



Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

- | | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------------------------------------|----------------------|
| a) 12 | <input type="text"/> | e) $-2e^{i\frac{3\pi}{5}}$ | <input type="text"/> |
| b) -8 | <input type="text"/> | f) $5 - 5i$ | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{3}i$ | <input type="text"/> | g) $-5 + 5i\sqrt{3}$ | <input type="text"/> |
| d) $-2i$ | <input type="text"/> | h) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$ | <input type="text"/> |

Un calcul plus dur

Calcul 11.3 — Une simplification.



On pose $z = \frac{1 + \sqrt{2} + i}{1 + \sqrt{2} - i}$.

- | | |
|-------------------------------------------|----------------------|
| a) Calculer $ z $ | <input type="text"/> |
| b) Mettre z sous forme algébrique | <input type="text"/> |
| c) Calculer z^{2021} | <input type="text"/> |

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 5\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} & 5 & -119 + 120i & 2e^{-i\frac{\pi}{2}} & 12 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & 1 \\
 -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} & 8e^{i\pi} & \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} & 10e^{i\frac{2\pi}{3}} & \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i & \frac{4}{29} - \frac{19}{29}i & \\
 13 - i & 7 - 24i & 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}} & \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} & 4 + 32i & 2e^{i\frac{8\pi}{5}} &
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 110

Trigonométrie et nombres complexes

Prérequis

Nombres complexes, trigonométrie.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Linéarisations

Calcul 12.1



Linéariser :

a) $\cos^3(x)$

d) $\cos(3x) \sin^3(2x)$...

b) $\cos(2x) \sin^2(x)$

e) $\cos^3(2x) \cos(3x)$..

c) $\cos^2(2x) \sin^2(x)$...

f) $\sin^2(4x) \sin(3x)$...

Arc-moitié, arc-moyen

Calcul 12.2



Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$) :

a) $1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$

e) $-1 - e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) $1 + e^{i\frac{7\pi}{6}}$

f) $1 - e^{i\frac{\pi}{12}}$

c) $e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1$

g) $\frac{1 + e^{i\frac{\pi}{6}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{12}}}$

d) $1 + ie^{i\frac{\pi}{3}}$

h) $(1 + e^{i\frac{\pi}{6}})^{27}$

Calcul 12.3



Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$) :

a) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) $e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{2}}$

Délinéarisations

Calcul 12.4



Exprimer en fonction des puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$:

a) $\cos(3x)$

b) $\sin(4x)$

Factorisations

Calcul 12.5



Factoriser :

a) $\cos(x) + \cos(3x) \dots\dots$

c) $\cos(x) - \cos(3x) \dots\dots$

b) $\sin(5x) - \sin(3x) \dots\dots$

d) $\sin(3x) + \sin(5x) \dots\dots$

Calcul 12.6



Factoriser :

a) $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) \dots\dots\dots$

b) $\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x) \dots\dots\dots$

c) $\cos(x) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) \dots\dots\dots$

Calculs d'intégrales

Calcul 12.7



Calculer :

a) $\int_0^\pi e^x \sin(x) dx \dots\dots\dots$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos(x) dx \dots\dots\dots$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 -\frac{1}{4} \sin(11x) + \frac{1}{4} \sin(5x) + \frac{1}{2} \sin(3x) & & -\frac{1}{8} \cos(6x) + \frac{1}{4} \cos(4x) - \frac{3}{8} \cos(2x) + \frac{1}{4} & & & & \\
 \frac{1}{5}(e^\pi - 2) & 2 \sin\left(\frac{\pi}{24}\right) e^{-i\frac{11\pi}{24}} & 2^{27} \cos^{27}\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{4}} & 2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{11\pi}{12}} & & & \\
 4 \cos^3(x) \sin(x) - 4 \cos(x) \sin^3(x) & & -\frac{1}{4} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{4} & & 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{13\pi}{12}} & & \\
 2 \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) e^{\frac{5i\pi}{12}} & \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x) & 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{5\pi}{12}} & 2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{-\frac{7i\pi}{12}} & & & \\
 2 \cos(2x) \cos(x) & 2 \sin(x) \sin(2x) & -\frac{\sin(9x)}{8} + \frac{3 \sin(5x)}{8} - \frac{\sin(3x)}{8} - \frac{3 \sin(x)}{8} & & \frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)} e^{\frac{13i\pi}{24}} & & \\
 2 \cos(4x) \sin(x) & 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x) & 2 \sin(4x) \cos(x) & \frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right) \sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \frac{\sin(8x)}{2 \sin(x)} & & \\
 \frac{\cos(9x)}{8} + \frac{3 \cos(5x)}{8} + \frac{\cos(3x)}{8} + \frac{3 \cos(x)}{8} & \frac{e^\pi + 1}{2} & 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{12}} & 0 & \left(-2 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right) e^{-i\frac{5\pi}{12}} & &
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 112

Dérivation

Prérequis

Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Application des formules usuelles

Calcul 13.1 — Avec des produits.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6) \exp(2x)$

d) $x \in]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x) \ln(x - 2)$

Calcul 13.2 — Avec des puissances.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2 \cos(x))^2$

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3 \cos(x) - \sin(x))^3$

Calcul 13.3 — Avec des fonctions composées.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

b) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x) \exp(x^2 + x)$

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3 \sin(2x))$

Calcul 13.4 — Avec des fonctions composées — bis.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos\left(\frac{2x + 1}{x^2 + 4}\right)$

c) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$

d) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \sin(\sqrt{x})$

Calcul 13.5 — Avec des quotients.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2\sin(x) + 3}$

b) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x + 2}$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{\cos(2x + 1)}{x^2 + 1}$

d) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{\ln(x)}$

Opérations et fonctions composées

Calcul 13.6



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $x \in]-3, 3[$ et $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$

d) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

Dériver pour étudier une fonction

Calcul 13.7



Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}$ et $f(x) = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{2+x}$

b) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2 + x - 2) - \frac{x+2}{x-1}$

d) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = \frac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$

e) $x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$ et $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{1 - \ln(x)}$

Réponses mélangées

$$\frac{(2x+3)(2\sin(x)+3) - (x^2+3x) \times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2} \quad 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x \sin(x)}$$

$$5x^4 - 6x^2 + 4x - 15 \quad \frac{2x^2 + 2x - 8}{(x^2 + 4)^2} \sin\left(\frac{2x+1}{x^2+4}\right) \quad 6 \cos(2x) \exp(3 \sin(2x))$$

$$8 \cos^2(x) - 6 \cos(x) \sin(x) - 4 \quad -2 \frac{(x^2+1) \sin(2x+1) + x \cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{1}{x \ln(x)} \quad \frac{2}{x(1-\ln(x))^2} \quad \frac{x^2}{(x+1)^2} \quad 4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)$$

$$6x^2 + 2x - 11 \quad (2x^2 - 2x + 10) \exp(2x) \quad 5(x^2 - 5x)^4(2x - 5)$$

$$\frac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2} \quad \frac{2}{x+1} \left(x + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \left(x + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \quad \frac{(4x+3) \ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$$

$$-3(3 \cos(x) - \sin(x))^2(3 \sin(x) + \cos(x)) \quad \frac{1}{1-x^2} \quad (6x-1) \ln(x-2) + \frac{3x^2-x}{x-2}$$

$$\frac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} \quad \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}} \quad \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \quad \frac{6x}{(x^2+1)^2} \cos\left(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\right)$$

$$\frac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2} \quad \frac{2x}{x^2+1} \quad (-2x^2+3x+1) \exp(x^2+x) \quad \frac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$$

► Réponses et corrigés page 115

Manipulation des fonctions usuelles

Prérequis

Dérivation, équations du second degré.

Calculs de valeurs

Calcul 14.1 — Fonctions circulaires réciproques.



Calculer les valeurs suivantes.

a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$

d) $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

b) $\frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

e) $\arctan(1)$

c) $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

f) $\arccos\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$

Calcul 14.2 — Valeurs des fonctions hyperboliques.



Calculer les valeurs suivantes. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$.

a) $\text{ch}(0)$

d) $\text{sh}(\ln(3))$

b) $\text{sh}(0)$

e) $\text{ch}(\ln(2/3))$

c) $\text{ch}(\ln(2))$

f) $\text{th}(\ln(2))$

Calcul 14.3 — Identités de trigonométrie hyperbolique.



Soient x et y des réels.

Calculer en développant soigneusement, et en simplifiant au maximum, les expressions suivantes.

a) $\text{ch}(x)\text{sh}(y) + \text{ch}(y)\text{sh}(x)$

b) $\text{ch}(x)\text{ch}(y) - \text{sh}(x)\text{sh}(y)$

Résolution d'équations

Calcul 14.4 — Fonctions $x \mapsto a^x$.



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $3^x = \frac{9^x}{2}$

c) $2^x = 3 \times 4^x$

b) $4^x = 2 \times 2^x$

d) $10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}$...

Calcul 14.5 — Fonctions $x \mapsto a^x$ (plus difficile).



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On pourra faire intervenir une équation de degré 2 en posant une nouvelle variable.

- a) $2^x + 4^x = 4$
- b) $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0$
- c) $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0$
- d) $3^x + 3^{2x} - 1 = 0$

Calcul 14.6 — Équations avec les fonctions circulaires réciproques.



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in [-1, 1]$ pour les deux premiers calculs, et $x \in \mathbb{R}$ pour les autres.

- a) $\arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$
- b) $\cos(\arccos(x)) = 0$
- c) $\arccos(\cos(x)) = 0$
- d) $\arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{3}$
- e) $\arcsin(\sin(x)) = \frac{1}{3}$
- f) $\tan(\arctan(x)) = 1$

Calcul 14.7 — Équations avec des fonctions hyperboliques.



Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$.

- a) $\text{ch}(x) = \sqrt{5}$
- b) $\text{sh}(x) = 1$
- c) $\text{th}(x) = \frac{1}{3}$
- d) $\text{ch}(x) \leq 4$
- e) $\text{sh}(x) \geq 3$
- f) $\text{th}(x) \leq \frac{1}{2}$

Dérivation

Calcul 14.8 — Quelques calculs de dérivées.



Dériver les fonctions suivantes.

- a) $x \mapsto 2^x + x^2$
- b) $x \mapsto \frac{3^x}{5x + 1}$
- c) $x \mapsto x^x$
- d) $x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$

Calcul 14.9 — Quelques calculs de dérivées — bis.



Dériver les fonctions suivantes. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$.

- a) $x \mapsto \arcsin(x^2) \dots\dots$ c) $x \mapsto \arctan(\text{th}(x)) \dots$
- b) $x \mapsto \text{ch}(x)\text{sh}(x) \dots\dots$ d) $x \mapsto \text{sh}(\text{ch}(x)) \dots\dots$

Calcul 14.10 — Deux dérivées importantes.



- a) $x \mapsto \arcsin(x) + \arccos(x) \dots\dots\dots$
- b) $x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \dots\dots\dots$

Calcul 14.11 — Des dérivées plus compliquées.



Dériver les fonctions suivantes. Dans ce qui suit, la fonction F est une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$.

- a) $x \mapsto F(x^x) \dots\dots\dots$
- b) $x \mapsto F(\sqrt{\ln(\text{ch}(x))}) \dots\dots\dots$
- c) $x \mapsto \sqrt{1-x^2} + x \arcsin(x) \dots\dots\dots$
- d) $x \mapsto x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \dots\dots\dots$

Réponses mélangées

$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$	$[\ln(3 + \sqrt{10}), +\infty[$	$\frac{1}{2} \ln(2)$	$x \mapsto \frac{1 - \text{th}^2(x)}{1 + \text{th}^2(x)}$	$x \mapsto 2x \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$
$\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}$	$\frac{3}{5}$	$]-\infty, \frac{1}{2} \ln(3)]$	0	$\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$	1
$\left\{\frac{1}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\cup \left\{\pi - \frac{1}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\frac{\pi}{6}$	$\{\ln(\sqrt{5}-2); \ln(\sqrt{5}+2)\}$	$x \mapsto \ln(2) \times 2^x + 2x$	$x \mapsto \text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x)$
$\frac{\pi}{3}$	$x \mapsto (\ln(x) + 1)x^x$	$[-\ln(4 + \sqrt{15}), \ln(4 + \sqrt{15})]$	$\frac{\pi}{4}$	1	$1 - \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$
$\frac{\ln(4)}{\ln(20/3)}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)^2} \frac{1}{2\sqrt{\ln(\text{ch}(x))}}$	1	$x \mapsto 0$
$x \mapsto \frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2} \arccos(x)^2}$	$x \mapsto \arctan(x)$	$x \mapsto (\ln(x) + 1)x^x e^{-x^2}$	$x \mapsto \text{sh}(x)\text{ch}(\text{ch}(x))$	$\frac{13}{12}$	0
$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$x \mapsto \frac{15^x \ln(3/5) + 3^x \ln(3)}{(5^x + 1)^2}$	$x \mapsto \arcsin(x)$	$\left\{0; \frac{1}{2}\right\}$	$\text{ch}(x + y)$	
$x \mapsto 0$	$\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$	$\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	1	$\ln(1 + \sqrt{2})$	$\text{sh}(x + y)$
		$\cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$			

► Réponses et corrigés page 118