

TD fonctions usuelles

Exercice 1

(3605)

Périodique...

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \cos 3x \cos^3 x.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(-x)$ et $f(x + \pi)$ en fonction de $f(x)$. Sur quel intervalle I peut-on se contenter d'étudier f ?

Vérifier que $f'(x)$ est du signe de $-\sin(4x)$, et en déduire le sens de variation de f sur I .

Tracer la courbe représentative de f .

Exercice 2

(3606)

Quotient de sinus

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}.$$

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Quel est le domaine de définition de f ? Vérifier que f est 2π -périodique.

Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$. Que dire sur Γ ?

Étudier les variations de f sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, puis déterminer la limite de f en $-\pi/2$.

Construire Γ à l'aide des renseignements précédents.

Exercice 3

(3619)

Étude de fonction et de la réciproque

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^x$.

Étudier les variations de f et ses limites en $\pm\infty$. Préciser la tangente à la courbe représentative de f en l'origine.

Démontrer que f induit une bijection h de $[-1, +\infty[$ sur $[-e^{-1}, +\infty[$.

On note W l'application réciproque de h . Justifier que W est dérivable sur $]-e^{-1}, +\infty[$ et vérifier que

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1 + W(x))}.$$

Exercice 4

(3620)

Dérivée de la réciproque

Démontrer que les fonctions suivantes sont bijectives, et donner l'équation de la tangente à la courbe $y = f^{-1}(x)$ au point $x = 0$.

$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -1 + e^{x-1} + \ln x$;

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x + \sin^4 x$.

Exercice 5

(525)

Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\sin x \leq x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 6

(528)

Simplifier

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}$$

En déduire la valeur de

$$\tan \frac{\pi}{24}$$

Exercice 7

(529)

Linéariser :

a) $\cos^2 x$

c) $\cos^2 x \sin^2 x$

e) $\cos a \cos b \cos c$

b) $\cos x \sin^2 x$

d) $\cos a \cos b$

Exercice 8

(533)

Résoudre les équations suivantes d'inconnues $x \in \mathbb{R}$.

a) $\cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4)$

d) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

b) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1$

e) $3 \cos x - \sqrt{3} \sin x = \sqrt{6}$

c) $\sin x + \sin 3x = 0$

f) $2 \sin x \cdot \cos x + \sqrt{3} \cos 2x = 0$