# Corrigé
# TD fonctions usuelles

## Exercice 1
## (3605)

On a
$$f(-x)=\cos(-3x)(\cos\hat{}\,3(-x))=\cos(3x)\cos\hat{}\,3(x)=f(x).$$
La fonction $f$ est paire, on peut se contenter de l'étudier sur $[0,+\infty[$. De plus,
$$f(x+\pi)=\cos(3x+3\pi)\cos\hat{}\,3(x+\pi)=-\cos(3x)(-\cos x)\hat{}\,3=f(x).$$
$f$ est donc $\pi$-périodique. Finalement, on peut se contenter d'étudier $f$ sur l'intervalle $I=[0,\pi/2]$. On obtiendra aussi la courbe de $f$ sur $[-\pi/2,\pi/2]$ par parité. Cet intervalle est de longueur $\pi$ et la fonction est $\pi$-périodique. On va donc déduire le reste de la courbe par des translations de vecteur $k\pi\vec{i}$, $k\in\mathbb{Z}$.

$f$ est dérivable sur $I$ et pour tout $x\in I$, on a
$$\begin{aligned} f'(x) &= -3\sin(3x)\cos\hat{}\,3(x)-3\cos(3x)\sin(x)\cos\hat{}\,2(x)\\ &= -3\cos\hat{}\,2(x)\big(\sin(3x)\cos(x)+\sin(x)\cos(3x)\big)\\ &= -3\cos\hat{}\,2(x)\sin(4x). \end{aligned}$$
Puisque $\cos\hat{}\,2(x)\geq 0$, $f'$ est bien du signe de $-\sin(4x)$ sur l'intervalle $[0,\pi/2]$. En particulier, <ul class="rien">
si $x\in[0,\pi/4]$, $f'(x)\leq 0$ et $f$ est décroissante ;
si $x\in[\pi/4,\pi/2]$, $f'(x)\geq 0$ et $f$ est croissante. </ul>
On obtient le dessin suivant : <div class=equation> <img src=http ://www.bibmath.net/ressources/bde/images/une cosinus.png>

## Exercice 2
## (3606)

$f(x)$ est défini partout où le dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire pour tout les $x$ avec $\sin x\neq -1$. Le domaine de définition de $f$ est donc
$$\mathcal{D}\{=\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$
De plus, la $2\pi$-périodicité de sin entraîne facilement la $2\pi$-périodicité de $f$.

De $\sin(\pi-x)=\sin x$, on déduit que $f(\pi-x)=f(x)$. Ceci signifie que la droite d'équation $x=\pi/2$ est un axe de symétrie de $\Gamma$.

Posons $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$ et $h(x)=\sin x$. On a $f=g\circ h$. De plus, $h$ est croissante sur l'intervalle $]-\pi/2,\pi/2]$ dont l'image est $]-1,1]$. La fonction $g$ est elle croissante sur l'intervalle $]-1,1]$ (par exemple, on peut écrire $g(x)=1-\dfrac{1}{x+1}$. Par composition, $f$ est croissante sur $]-\pi/2,\pi/2]$.<br> On a $\sin(x)\to -1\hat{}+$ lorsque $x$ tend vers $-\pi/2$ et $\lim\S\to-\infty\hat{}+g(x)=-\infty$. Ainsi, par composition de limites, $f$ tend vers $-\infty$ en $-\pi/2$.

On construit d'abord $\gamma$ sur $]-\pi/2,\pi/2]$. On la déduit sur $]-\pi/2,3\pi/2]$ par symétrie d'axe $x=\pi/2$. Enfin, on l'obtient sur $\mathbb{R}$ par périodicité de période $2\pi$, et donc par des translations de vecteur $k2\pi\vec{i}$, $k\in\mathbb{Z}$. On obtient :<br> <div class=equation> <img src=http ://www.bibmath.net/ressources/bde/images/unevar-quotientsinus.png>

## Exercice 3

**(3619)**

$f$ est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (1+x)e\hat{}x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. $f'$ est donc du signe de $1+x$, c'est-à-dire strictement négatif si $x < -1$ et strictement positif si $x > -1$. Ainsi, $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty, -1[$ et strictement croissante sur $]-1, +\infty[$. De plus, par croissance comparée en $-\infty$, et comme produit de limites infinies en $+\infty$,

$$\lim \S \to -\infty f(x) = 0 \text{ et } \lim \S \to +\infty x e\hat{}x = +\infty.$$

Enfin, $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$, donc la droite $y = x$ est la tangente en la courbe en l'origine.

$h$ est continue et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. Elle réalise donc une bijection entre $[-1, +\infty[$ et $h([-1, +\infty[) = [-e\hat{}-1, +\infty[$.

Sur l'intervalle $]-1, +\infty[$, $h'$ ne s'annule pas. On en déduit donc que $W$ est dérivable sur $]-e\hat{}-1, +\infty[$ et que sa dérivée vérifie, pour tout $x > -e\hat{}-1$,

$$W'(x) = \frac{1}{h'(W(x))}.$$

Donc,

$$W'(x) = \frac{1}{(1+W(x))e\hat{}W(x)}.$$

Or, $W(x)e\hat{}W(x) = x$, et donc $e\hat{}W(x) = \frac{x}{W(x)}$. On obtient bien la formule

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}.$$

## Exercice 4
**(3620)**

$f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, on a

$$f'(x) = e\hat{}x - 1 + \frac{1}{x} > 0.$$

La fonction $f$ est donc strictement croissante. De plus,

$$\lim \S \to \prime f(x) = -\infty \text{ et } \lim \S \to +\infty f(x) = +\infty,$$

et $f$ est continue. $f$ réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. En outre, $f(1) = 0$. On en déduit que

$$(f\hat{}-1)'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la tangente à la courbe $y = f\hat{}-1(x)$ au point $x = 0$ au point $x = 0$ a pour équation

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 0).$$

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x > 0$, on a

$$f'(x) = 4 + 4\sin\hat{}3(x)\cos x.$$

Comme $|\sin\hat{}3(x)\cos x| < 1$ (les fonctions sinus et cosinus ne peuvent atteindre leur extrema au même endroit), on en déduit que $f'(x) > 0$ et donc que la fonction $f$ est strictement croissante. Elle est de plus continue et vérifie

$$\lim \S \to -\infty f(x) = -\infty \text{ et } \lim \S \to +\infty f(x) = +\infty.$$

Ainsi, $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. De plus, $f(0) = 0$. On en déduit que

$$(f\hat{}-1)'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, la tangente à la courbe $y = f\hat{}-1(x)$ au point $x = 0$ au point $x = 0$ a pour équation

$$y - 0 = \frac{1}{4}(x - 0).$$

## Exercice 5
**(525)**
Posons $f(x) = x - \sin x$ définie sur $\mathbb{R}_+$ . $f$ est dérivable, $f^{'} \geq 0$ et $f(0) = 0$ donc $f$ est positive. Posons

$$g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$$

définie sur $\mathbb{R}$. $g$ est deux fois dérivable, $g^{''} \geq 0$,

$g^{'}(0) = g(0) = 0$ permet de dresser les tableaux de variation et de signe de $g^{'}$ puis de $g$. On conclut $g$ positive.

## Exercice 6
**(528)**
Par factorisation

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q} = -\frac{\sin\frac{p-q}{2}}{\cos\frac{p-q}{2}} = -\tan\frac{p-q}{2}$$

Pour $p = \dfrac{\pi}{4}$ et $q = \dfrac{\pi}{6}$ on obtient

$$\tan\frac{\pi}{24} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$$

## Exercice 7
**(529)**
(a)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}.$$

(b)

$$\cos x \sin^2 x = \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\cos 3x.$$

(c)

$$\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)$$

(d)

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos\left(a+b\right) + \cos\left(a-b\right)\right)$$

(e)

$$\cos a \cos b \cos c = \frac{1}{4}\left(\cos\left(a+b+c\right) + \cos\left(a+b-c\right) + \cos\left(a-b+c\right) + \cos\left(a-b-c\right)\right).$$

**Exercice 8**
**(533)**
(a) L'équation étudiée équivaut à

$$\cos\left(2x - \pi/3\right) = \cos\left(x + \pi/4\right)$$

On obtient pour solutions

$$x = \frac{7\pi}{12}\ [2\pi] \text{ et } x = \frac{\pi}{36}\ [\frac{2\pi}{3}]$$

(b) L'équation étudiée équivaut à

$$\cos^4 x + \sin^4 x = \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2$$

soit encore $2\cos^2 x \sin^2 x = 0$ On obtient pour solutions

$$x = 0\ [\pi/2]$$

(c) L'équation étudiée équivaut à $2\sin 2x \cos x = 0$ On obtient pour solutions

$$x = 0\ [\pi/2]$$

(d) L'équation étudiée équivaut à

$$2\sin\left(2x\right)\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

On obtient pour solutions

$$x = 0\ [\pi/2], x = \frac{2\pi}{3}[2\pi] \text{ et } x = -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$$

(e) L'équation étudiée équivaut à

$$2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) = \sqrt{6}$$

soit encore

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$

On obtient pour solutions

$$x = \frac{\pi}{12}\ [2\pi] \text{ et } x = -\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$$

(f) L'équation étudiée équivaut à

$$2\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) = 0$$

soit encore $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ On obtient pour solutions

$$x = \frac{\pi}{3}\ [\pi] \text{ et } x = -\frac{\pi}{6}\ [\pi]$$