

Corrigé TD fonctions usuelles

Exercice 1 (3605)

On a

$$f(-x) = \cos(-3x) \cos^3(-x) = \cos(3x) \cos^3(x) = f(x).$$

La fonction f est paire, on peut se contenter de l'étudier sur $[0, +\infty[$. De plus,

$$f(x + \pi) = \cos(3x + 3\pi) \cos^3(x + \pi) = -\cos(3x) (-\cos x)^3 = f(x).$$

f est donc π -périodique. Finalement, on peut se contenter d'étudier f sur l'intervalle $I = [0, \pi/2]$. On obtiendra aussi la courbe de f sur $[-\pi/2, \pi/2]$ par parité. Cet intervalle est de longueur π et la fonction est π -périodique. On va donc déduire le reste de la courbe par des translations de vecteur $k\pi\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

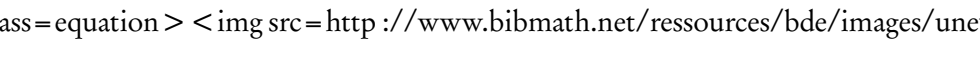
f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3 \sin(3x) \cos^3(x) - 3 \cos(3x) \sin(x) \cos^2(x) \\ &= -3 \cos^2(x) (\sin(3x) \cos(x) + \sin(x) \cos(3x)) \\ &= -3 \cos^2(x) \sin(4x). \end{aligned}$$

Puisque $\cos^2(x) \geq 0$, f' est bien du signe de $-\sin(4x)$ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$. En particulier,

si $x \in [0, \pi/4]$, $f'(x) \leq 0$ et f est décroissante ;

si $x \in [\pi/4, \pi/2]$, $f'(x) \geq 0$ et f est croissante.

On obtient le dessin suivant : 

Exercice 2 (3606)

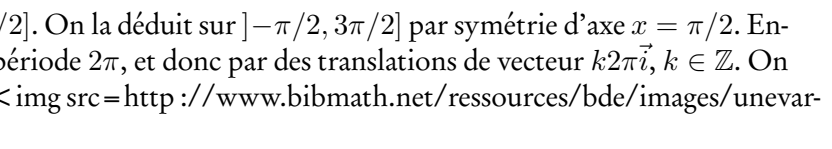
$f(x)$ est défini partout où le dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire pour tout les x avec $\sin x \neq -1$. Le domaine de définition de f est donc

$$\mathcal{D}\{ = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

De plus, la 2π -périodicité de \sin entraîne facilement la 2π -périodicité de f .

De $\sin(\pi - x) = \sin x$, on déduit que $f(\pi - x) = f(x)$. Ceci signifie que la droite d'équation $x = \pi/2$ est un axe de symétrie de Γ .

Posons $g(x) = \frac{x}{x+1}$ et $h(x) = \sin x$. On a $f = g \circ h$. De plus, h est croissante sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2]$ dont l'image est $] -1, 1]$. La fonction g est elle croissante sur l'intervalle $] -1, 1]$ (par exemple, on peut écrire $g(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$). Par composition, f est croissante sur $]-\pi/2, \pi/2]$. On a $\sin(x) \rightarrow -1$ lorsque x tend vers $-\pi/2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+1} = 0$. Ainsi, par composition de limites, f tend vers $-\infty$ en $-\pi/2$.

On construit d'abord γ sur $]-\pi/2, \pi/2]$. On la déduit sur $]-\pi/2, 3\pi/2]$ par symétrie d'axe $x = \pi/2$. Enfin, on l'obtient sur \mathbb{R} par périodicité de période 2π , et donc par des translations de vecteur $k2\pi\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$. On obtient : 

Exercice 3

(3619)

f est clairement dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = (1+x)e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. f' est donc du signe de $1+x$, c'est-à-dire strictement négatif si $x < -1$ et strictement positif si $x > -1$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $] -\infty, -1[$ et strictement croissante sur $] -1, +\infty[$. De plus, par croissance comparée en $-\infty$, et comme produit de limites infinies en $+\infty$,

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{\xi \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty.$$

Enfin, $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$, donc la droite $y = x$ est la tangente en la courbe en l'origine.

h est continue et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. Elle réalise donc une bijection entre $[-1, +\infty[$ et $h([-1, +\infty[) = [-e^{-1}, +\infty[$.

Sur l'intervalle $] -1, +\infty[$, h' ne s'annule pas. On en déduit donc que W est dérivable sur $] -e^{-1}, +\infty[$ et que sa dérivée vérifie, pour tout $x > -e^{-1}$,

$$W'(x) = \frac{1}{h'(W(x))}.$$

Donc,

$$W'(x) = \frac{1}{(1+W(x))e^{W(x)}}.$$

Or, $W(x)e^{W(x)} = x$, et donc $e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}$. On obtient bien la formule

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}.$$

Exercice 4

(3620)

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, on a

$$f'(x) = e^x - 1 + \frac{1}{x} > 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante. De plus,

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{\xi \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

et f est continue. f réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur \mathbb{R} . En outre, $f(1) = 0$. On en déduit que

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la tangente à la courbe $y = f^{-1}(x)$ au point $x = 0$ a pour équation

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 0).$$

f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout $x > 0$, on a

$$f'(x) = 4 + 4 \sin^3(x) \cos x.$$

Comme $|\sin^3(x) \cos x| < 1$ (les fonctions sinus et cosinus ne peuvent atteindre leur extrema au même endroit), on en déduit que $f'(x) > 0$ et donc que la fonction f est strictement croissante. Elle est de plus continue et vérifie

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} f(\xi) = -\infty \text{ et } \lim_{\xi \rightarrow +\infty} f(\xi) = +\infty.$$

Ainsi, f réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} . De plus, $f(0) = 0$. On en déduit que

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, la tangente à la courbe $y = f^{-1}(x)$ au point $x = 0$ a pour équation

$$y - 0 = \frac{1}{4}(x - 0).$$

Exercice 5

(525)

Posons $f(x) = x - \sin x$ définie sur \mathbb{R}_+ . f est dérivable, $f' \geq 0$ et $f(0) = 0$ donc f est positive. Posons

$$g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$$

définie sur \mathbb{R} . g est deux fois dérivable, $g'' \geq 0$,

$g'(0) = g(0) = 0$ permet de dresser les tableaux de variation et de signe de g' puis de g . On conclut g positive.

Exercice 6

(528)

Par factorisation

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q} = -\frac{\sin \frac{p-q}{2}}{\cos \frac{p-q}{2}} = -\tan \frac{p-q}{2}$$

Pour $p = \frac{\pi}{4}$ et $q = \frac{\pi}{6}$ on obtient

$$\tan \frac{\pi}{24} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$$

Exercice 7

(529)

(a)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}.$$

(b)

$$\cos x \sin^2 x = \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{4} \cos 3x.$$

(c)

$$\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{8} (1 - \cos 4x)$$

(d)

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos (a + b) + \cos (a - b))$$

(e)

$$\cos a \cos b \cos c = \frac{1}{4} (\cos (a + b + c) + \cos (a + b - c) + \cos (a - b + c) + \cos (a - b - c)).$$

Exercice 8

(533)

(a) L'équation étudiée équivaut à

$$\cos (2x - \pi/3) = \cos (x + \pi/4)$$

On obtient pour solutions

$$x = \frac{7\pi}{12} [2\pi] \text{ et } x = \frac{\pi}{36} \left[\frac{2\pi}{3} \right]$$

(b) L'équation étudiée équivaut à

$$\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2$$

soit encore $2\cos^2 x \sin^2 x = 0$ On obtient pour solutions

$$x = 0 [\pi/2]$$

(c) L'équation étudiée équivaut à $2\sin 2x \cos x = 0$ On obtient pour solutions

$$x = 0 [\pi/2]$$

(d) L'équation étudiée équivaut à

$$2\sin (2x) \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) = 0$$

On obtient pour solutions

$$x = 0 [\pi/2], x = \frac{2\pi}{3} [2\pi] \text{ et } x = -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

(e) L'équation étudiée équivaut à

$$2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) = \sqrt{6}$$

soit encore

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{4}$$

On obtient pour solutions

$$x = \frac{\pi}{12} [2\pi] \text{ et } x = -\frac{5\pi}{12} [2\pi]$$

(f) L'équation étudiée équivaut à

$$2 \left(\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \right) = 0$$

soit encore $\sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = 0$ On obtient pour solutions

$$x = \frac{\pi}{3} [\pi] \text{ et } x = -\frac{\pi}{6} [\pi]$$