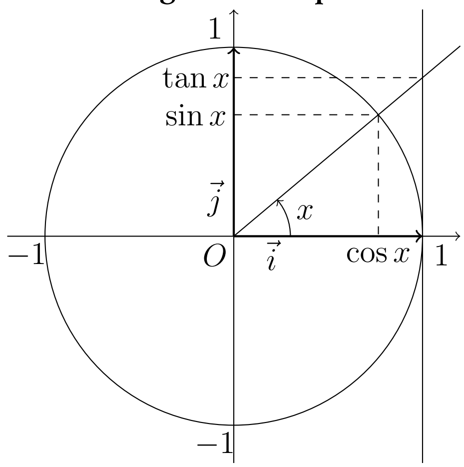
Formules de trigonométrie

Le cercle trigonométrique



Les valeurs à connaître

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non déf.	0

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

Périodes, régularités : pour tout $x \in \mathbb{R}$, quand les expressions sont définies, on a :

$\cos(x+2\pi) = \cos x$	$\sin(x+2\pi) = \sin x$	
$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$	$\tan(-x) = -\tan x$
$\cos(x+\pi) = -\cos x$	$\sin(x+\pi) = -\sin x$	$\tan(x+\pi) = \tan x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	
$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$	$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$	
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{1}{\tan x}$

Sommes : pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, quand les expressions sont définies, on a :

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \sin(2a) &= 2 \sin a \cos a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \cos(2a) &= 2\cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 a \end{aligned}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Arc moitié : pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $t = \tan\dfrac{x}{2}$, alors, quand les expressions sont définies, on a

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Résolution d'équations trigonométriques

Factorisation et linéarisation

Pour tout $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ on a

factorisation

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

linéarisation

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$
$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$
$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

Égalités de $\sin, \cos, \tan$

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\quad \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\quad \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\quad \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\quad \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\cos x = \cos y &\Leftrightarrow x = y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ } ou \text{ } x = -y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
\sin x = \sin y &\Leftrightarrow x = y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ } ou \text{ } x = \pi - y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
\tan x = \tan y &\Leftrightarrow x = y + k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Résolution de $a\cos x + b\sin x = c$, avec $x, a, b, c \in \mathbb{R}$, a ou b non nul

Faire apparaître $\sin(x+\alpha)$ ou $\cos(x+\alpha)$,
en posant $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$:

$$\begin{aligned}
a\cos x + b\sin x &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right) \\
&= \sqrt{a^2+b^2}(\sin\alpha\cos x + \cos\alpha\sin x) \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{a\cos x + b\sin x = c \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.

Cas particuliers :

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$$