Corrigé
TD complexes

Exercice 1
(1202)
Puisque $z \in U$, on a $\overline{z} = 1/z$ donc

$$\overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} = \frac{1/z+1}{1/z-1} = \frac{1+z}{1-z} = -\frac{z+1}{z-1}$$

puis
$\frac{z+1}{z-1} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$

Exercice 2
(1203)
(a) Posons $x = \mathrm{Re}\,(z)$ et $y = \mathrm{Im}\,(z)$.

$$|f\,(z)|^2 = \frac{\left|z-\mathrm{i}\right|^2}{\left|z+\mathrm{i}\right|^2} = \frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2}$$

Si $y > 0$ alors
$$x^2+(y-1)^2 < x^2+(y+1)^2$$
donc $|f\,(z)| < 1$. Ainsi, $\forall z \in P, f\,(z) \in D$ (b) Soit $Z \in D$.

$$Z = \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \mathrm{i}\frac{1+Z}{1-Z}$$

avec
$$\mathrm{i}\frac{1+Z}{1-Z} = \mathrm{i}\frac{1+Z-\overline{Z}-Z\overline{Z}}{|1-Z|^2} = -\frac{2\mathrm{Im}\,(Z)}{|1-Z|^2} + \mathrm{i}\frac{1-|Z|^2}{|1-Z|^2} \in P$$

Ainsi,
$$\forall Z \in D, \exists! z \in P, f\,(z) = Z$$

Exercice 3
(1204)

C_n et S_n sont les parties réelles et imaginaires de

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(n+1)\,\theta}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta/2}\frac{\sin\frac{(n+1)\,\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

Ainsi

$$C_n = \cos\frac{n\theta}{2}\frac{\sin\frac{(n+1)\,\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ et } S_n = \sin\frac{n\theta}{2}\frac{\sin\frac{(n+1)\,\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

Exercice 4

(1212)

$$|z+1|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z) + 1$$

et

$$(|z|+1)^2 = |z|^2 + 2|z| + 1$$

donc

$$|z+1| = |z| + 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+.$$

Exercice 5

(1213)

$|z|^2 = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$ donc $|z| = 2$.

Posons θ un argument de z qu'on peut choisir dans

$$[0;\pi/2]$$

car

$$\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) \geq 0.$$

On a $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ donc

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}\right) - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

avec

$$2\theta \in [0;\pi]$$

donc $2\theta = \pi/4$ puis $\theta = \pi/8$.

Exercice 6

(1220)

Puisque la somme des racines 5-ième de l'unité, en considérant la partie réelle, on obtient

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$$

Sachant $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, on obtient que $\cos(2\pi/5)$ est solution positive de l'équation

$4r^2 + 2r - 1 = 0$ et donc

$\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ Or $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ donc

$1 - 2\sin^2\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ puis

$\sin^2\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$ et enfin la formule proposée puisque $\sin(\pi/5) \geq 0$.

Exercice 7

(1225)
(a) $j\,(j+1) = j^2 + j = -1$ (b) $\dfrac{j}{j^2+1} = \dfrac{j}{-j} = -1$ (c)

$$\frac{j+1}{j-1} = \frac{(j+1)\,\overline{(j-1)}}{(j-1)\,\overline{(j-1)}} = \frac{(j+1)\,(j^2-1)}{(j-1)\,(j^2-1)} = \frac{j^3+j^2-j-1}{j^3-j^2-j+1} = \frac{-1-2j}{3}$$

Exercice 8
(1233)

$x=1$ est solution de l'équation si, et seulement si, $a^2-2a-3=0$ ce qui donne $a=-1$ ou $a=3$. Lorsque $a=-1$, les solutions de l'équation sont $1, \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}, -\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Lorsque $a=3$, les solutions de l'équation sont

$$1, \frac{-3+\mathrm{i}3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3+\mathrm{i}3\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 9
(1234)
(a)

$$\mathcal{S} = \{1, -1+2\mathrm{i}\}\,,$$

(b)

$$\mathcal{S} = \{-1+\mathrm{i}, -3+2\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}, 3-2\mathrm{i}\}\,.$$

Exercice 10
(1235)
(a) $\pm(3-2\mathrm{i})$ (b) $a=-2\mathrm{i}, b=-1+3i$ et $c=2+\mathrm{i}$ (c) $|c-b| = |c-a| = \sqrt{13}$ et $|b-a| = \sqrt{26}$. Le triangle est rectangle isocèle.

Exercice 11
(1238)

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1 = 2\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$$

. Si $\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$ alors $|z| = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$ et

$$\arg(z) = \frac{\theta}{2}\ [2\pi],$$

si $\cos\dfrac{\theta}{2} = 0$ alors $|z| = 0$. et si $\cos\dfrac{\theta}{2} < 0$ alors $|z| = -2\cos\dfrac{\theta}{2}$ et

$$\arg(z) = \frac{\theta}{2} + \pi\ [2\pi].$$

$$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1 = 2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$$

et la suite est similaire.

Exercice 12
(1239)
En factorisant $e^{i\theta/2}$ au numérateur et au dénominateur

$$\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}=\frac{i\sin\theta/2}{\cos\theta/2}=i\tan\frac{\theta}{2}$$

Exercice 13
(1240)
On peut factoriser

$$e^{i\theta}+e^{i\theta'}=e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}+e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}})=2\cos\frac{\theta-\theta'}{2}e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$$

ce qui permet de préciser module et argument en discutant selon le signe de $\cos\dfrac{\theta-\theta'}{2}$.

Exercice 14
(1241)
Puisque

$$e^{ix}+e^{iy}+e^{iz}=0,$$

en multipliant par e^{-ix}, on obtient

$$1+e^{i\alpha}+e^{i\beta}=0$$

avec $\alpha=y-x$ et $\beta=z-x$. En passant aux parties réelle et imaginaire

$$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta & =-1\\ \sin\alpha+\sin\beta & =0\end{cases}$$

L'équation $\sin\alpha+\sin\beta=0$ donne

$$\alpha=-\beta \bmod 2\pi \text{ ou } \alpha=\pi+\beta \bmod 2\pi$$

Si $\alpha=\pi+\beta \bmod 2\pi$ alors la relation $\cos\alpha+\cos\beta=-1$ donne $0=-1$. Il reste $\alpha=-\beta \bmod 2\pi$ et alors $2\cos\alpha=-1$ donne $\alpha=\pm 2\pi/3 \bmod 2\pi$. Par suite $e^{i\alpha}=j$ ou j^2 . On obtient alors aisément

$$1+e^{2i\alpha}+e^{2i\beta}=0$$

puis

$$e^{2ix}+e^{2iy}+e^{2iz}=0.$$