TD complexes 2

Exercice 1

(3872)

Somme et puissances de racines n-iemes

Soit $n \geq 1$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$.

Calculer le produit des racines n-ièmes de l'unité.

Soit $p \geq 0$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$.

En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n = 2n$.

Exercice 2

(3892)

Lieux géométriques

Déterminer le lieu géométrique des points M dont l'affixe z vérifie

1. $\dfrac{|z-3|}{|z-5|} = 1$ **2.** $\dfrac{|z-3|}{|z-5|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3. $|(1+i)z - 2i| = 2$

Exercice 3

(3893)

Écriture complexe de transformations

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \mapsto \dfrac{1}{i} z$ **2.** $z \mapsto z + (2+i)$

3. $z \mapsto (1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1-i)$ **4.** $z \mapsto (1+i\tan\alpha)z - i\tan\alpha,\ \alpha \in [0, \pi/2[$.

Exercice 4

(3894)

Une coquille d'escargot

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note A_0 le point d'affixe 6 et S la similitude de centre O, de rapport $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$. On pose $A_{n+1} = S(A_n)$ pour $n \geq 1$.

Déterminer, en fonction de n, l'affixe du point A_n. En déduire que A_{12} est sur la demi-droite $(O, \vec{i})$.

Établir que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

Calculer la longueur du segment $[A_0A_1]$. En déduire la longueur ℓ de la ligne polygonale $A_0A_1A_2 \ldots A_{12}$.

Exercice 5

(3895)

Lieux géométriques

Pour chacune des conditions suivantes, déterminer le lieu géométrique des points M dont l'affixe z vérifie la condition.

$I(i)$ et $M'(iz)$ sont alignés avec M ; déterminer alors l'ensemble des points M' correspondants ;

$\mathrm{Re}\, e\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right) = 0\,;$
M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 sont les sommets d'un triangle rectangle.

Exercice 6
(3897)
A partir des racines n-ièmes
Soit a un nombre complexe de module 1, $z_1, \ldots, z_n$ les racines de l'équation $z^n = a$. Montrer que les points du plan complexe dont les affixes sont $(1+z_1)^n, \ldots, (1+z_n)^n$ sont alignés.

Exercice 7
(3898)
Alignement de puissances
Trouver tous les nombres complexes z tels que z, z^2 et z^4 soient alignés.

Exercice 8
(3900)
Triangle équilatéral
Montrer que le triangle de sommets $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ et $M_3(z_3)$ est équilatéral si et seulement si

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3.$$